7-я Иранская олимпиада по геометрии

Профессионалы

30 октября 2020 г.

Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.ir

Задача 1. Точки M, N и P — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC соответственно. На отрезке BC выбраны такие точки E и F, что $\angle NEC = \frac{1}{2}\angle AMB$ и $\angle PFB = \frac{1}{2}\angle AMC$. Докажите, что $AE = AF$.

Задача 2. Точка I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC. Пусть N — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, P — такая точка, что $ABPC$ является параллелограммом. Точка Q симметрична A относительно N, R — проекция A на прямую QI. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника PQR.

Задача 3. Три круга на плоскости таковы, что любые два из них не имеют общих точек, и любая прямая, отделяющая один круг от другого, пересекается с внутренностью третьего круга. Докажите, что сумма попарных расстояний между центрами кругов не превосходит суммы их радиусов, умноженной на $2\sqrt{2}$.
(Прямая отделяет один круг от другого, если круги не имеют с прямой общих точек и находятся в разных полуплоскостях относительно прямой.)

Замечание. Более слабые результаты с заменой $2\sqrt{2}$ на c могут быть оценены в зависимости от значения константы $c > 2\sqrt{2}$.

Задача 4. В выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке I. Она касается сторон AD, DC, CB и BA в точках K, L, M и N соответственно. Прямые AD и BC пересекаются в точке E, прямые AB и CD — в точке F. Прямая KM пересекает прямые AB и CD в точках X и Y соответственно. Прямая LN пересекает прямые AD и BC в точках Z и T соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника XFY касается окружности, построенной на отрезке EI как на диаметре, тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника TEZ касается окружности, построенной на отрезке FI как на диаметре.

Задача 5. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC ($AC > AB$) с ортоцентром H и описанной окружностью Γ. Точки M и P — середины отрезков BC и AH соответственно. Прямая AM вторично пересекает Γ в точке X, точка N на прямой BC такова, что прямая NX касается Γ. Точки J и K лежат на окружности, построенной на MP как на диаметре, причём $\angle AJP = \angle HNM$ (B и J лежат в одной полуплоскости относительно прямой AH), а окружность ω_1, проходящая через точки K, H и J, и окружность ω_2, проходящая через точки K, M и N, касаются друг друга внешним образом. Докажите, что общие внешние касательные ω_1 и ω_2 пересекаются на прямой NH.

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается из 8 баллов.