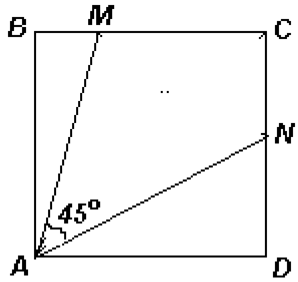
9.03.21

Угол в квадрате

Речь пойдет об удивительной геометрической конструкции, возникшей на основе ряда задач замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова.

Рис. 1

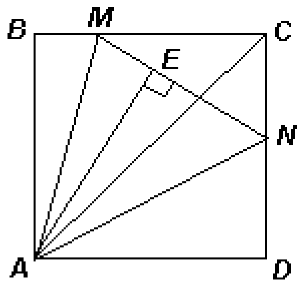


С одной из этих задач мы уже встречались, причем не один раз.

Задача.. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° (см. рис. 1). Докажите, что расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.

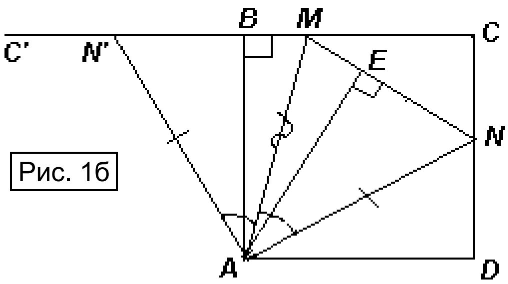
Разберем три способа решения этой задачи (последний способ – авторский).

Рис. 1а



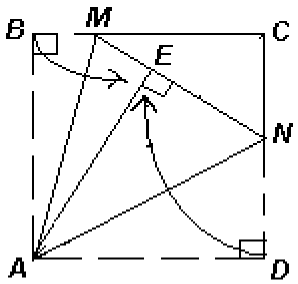
Решение. Проведем отрезок MN и опустим на него перпендикуляр AE (см. рис. 1 а – в).

<u>Первый способ</u>. Проведем диагональ AC квадрата и рассмотрим треугольник CMN (см. рис. 1а). Точка A лежит на биссектрисе угла C этого треугольника и $\angle MAN = 90° - \frac{1}{2}\angle C$, следовательно, точка A является центром вневписанной окружности треугольника CMN. Тогда $AE = AB = AD$ (радиусы этой окружности).



<u>Второй способ</u>. Рассмотрим поворот с центром A на угол 90° против часовой стрелки. Образом вершины D будет являться вершина B, образом прямой DC – прямая BC', ей перпендикулярная, поэтому точка N' (образ точки N) будет лежать на отрезке BC' (см. рис. 1б). Так как $\angle NAN' = 90°$, то $\angle MAN' = \angle MAN$, значит, треугольник AMN' равен треугольнику AMN (*по двум сторонам и углу между ними*). Следовательно, равны и их соответствующие высоты, то есть $AE = AB$.

Рис. 1в



<u>Третий способ</u>. «Перегнем» квадрат по прямым AM и AN. Так как $\angle BAM + \angle DAN = \angle MAN$ и $AB = AD$, то после таких перегибов отрезки AB и AD совместятся (см. рис. 1в). Кроме того, $\angle ABM = \angle ADN = 90°$, значит из точки, в которой оказались вершины B и D, отрезки AM и AN видны под прямым углом, а этому условию удовлетворяет только точка E. Значит, $AE = AB = AD$.

Этот авторский прием, конечно, имеет и «научное» обоснование. Он основан на том, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворотом на удвоенный угол между осями с центром в точке их пересечения. В данном случае речь идет о повороте с центром A на угол 90°, который является композицией симметрий относительно прямых AM и AN.

Задачи для самостоятельного решения

1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Докажите, что периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата тогда и только тогда, когда угол MAN равен 45°.

2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45°. Диагональ BD пересекает AM и AN в точках P и Q соответственно. Докажите, что: а) точки A, B, M, Q (равно как и точки A, D, N, P) лежат на одной окружности; б) общая хорда этих окружностей перпендикулярна MN; в) отрезки MQ, NP и

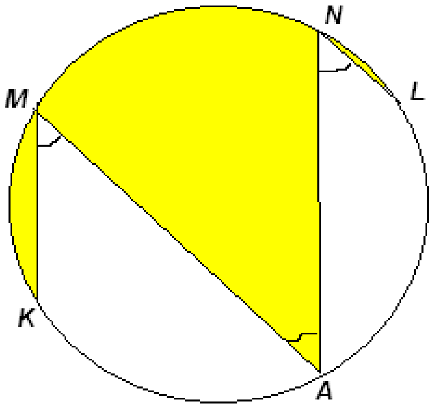
AE, где *E* – основание перпендикуляра, опущенного из *A* на *MN*, пересекаются в одной точке *H*; г) четырехугольник *PQNM* – вписанный; д) $S_{\Delta MAN} = 2S_{\Delta PAQ}$; е) $AH = MN = PQ\sqrt{2}$.

3. На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что угол *MAN* равен 45°. Лучи *AM* и *AN* пересекают описанную окружность квадрата в точках M_1 и N_1 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 \parallel MN$.

4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике *BAD* на гипотенузе *BD* выбраны точки *P* и *Q* так, что $\angle PAQ = 45°$ (*P* лежит между *B* и *Q*). Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + DQ^2$.

5. Вневписанная окружность прямоугольного треугольника *ABC* касается продолжений его катетов *CA* и *CB* в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника *ABC* пересекает A_1B_1 в точках *P* и *Q*. Найдите угол *PCQ*.

6. а) На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что угол *MAN* равен 45°. Докажите, что центр описанной окружности треугольника *MAN* лежит на диагонали *AC*. б) Окружность с центром на диагонали *AC* квадрата *ABCD* проходит через вершину *A* и пересекает стороны *BC* и *CD* в точках *M* и *N*, не симметричных относительно *AC*. Докажите, что угол *MAN* равен 45°.



7. На сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *AD* квадрата *ABCD* взяты соответственно точки *K*, *M*, *N* и *L* так, что $\angle KMA = \angle MAN = \angle LNA = 45°$. а) Докажите, что точки *A*, *K*, *M*, *N* и *L* лежат на одной окружности. б) Пусть *KL* пересекает *AM* и *AN* в точках *F* и *G* соответственно. Докажите, что $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$.

8. Вершины ломаной *KMANL* лежат на окружности и $\angle KMA = \angle MAN = \angle ANL = 45°$. Докажите, что: а) площадь закрашенной части равна половине площади круга (см. рисунок); б) $KM^2 + AN^2 = AM^2 + LN^2$.

9. Внутри квадрата *ABCD* выбраны точки *S* и *T* так, что $\angle SAT = \angle SCT = 45°$. Докажите, что $BS \parallel DT$.