15.12.20

Преобразование подобия

Гомотетия и поворотная гомотетия, о которых мы говорили на предыдущем занятии, являются частными случаями преобразования подобия, то есть преобразования плоскости, при котором все расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз. Любое преобразование подобия можно представить как композицию гомотетии и некоторого движения (так же, как и поворотную гомотетию). Сегодня мы уделим внимания задачам, в которых подобие выступает само по себе, причем обратим внимание не только на подобие треугольников, но и на подобие других фигур.

С таким подобием надо быть осторожным. Классические **примеры**:

Являются ли подобными:

а) картина без рамки и эта же картина в рамке (*изобразить*);

б) две трапеции с соответственно равными углами;

в) литровая и пол-литровая бутылки колы?

При использовании преобразования подобия надо обращать внимание на то, какие точки и отрезки соответствуют друг другу.

Задачи для самостоятельного решения

1. Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей одного треугольника подобна одной из частей другого треугольника. Обязательно ли подобны оставшиеся части?

2. Через произвольную внутреннюю точку P стороны AC треугольника ABC проведены прямые, параллельные его медианам AA' и CC'. Эти прямые пересекают стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезок EF делится медианами AA' и CC' на три равные части.

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне AD, причем $BM \parallel CD$ и $CM \parallel BA$. Найдите BC, если $AM = a$; $DM = b$.

4. Трапеция разделена на три трапеции прямыми, параллельными основаниям. Известно, что в каждую из трёх получившихся трапеций можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, вписанной в среднюю трапецию, если радиусы окружностей, вписанных в две крайние, равны R и r.

5. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E. ET – высота треугольника ABE, K – точка пересечения прямых DT и AE, M – точка пересечения прямых CT и BE. Докажите, что отрезок KM является стороной квадрата, вписанного в треугольник ABE.

6. Можно ли разрезать квадрат на три попарно подобных, но не равных прямоугольника?

7. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, AC и AB в точках A', B' и C' соответственно. Точка K – проекция точки C' на прямую $A'B'$. Докажите, что KC' – биссектриса угла AKB.

8. а) Докажите, что два выпуклых четырехугольника подобны, если у них соответственно равны три угла и углы между диагоналями.

б) Верно ли это для невыпуклых четырехугольников?

в) Четырехугольник $ABCD$ – выпуклый. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 таковы, что $A_1B_1 \parallel CD$, $B_1C_1 \parallel DA$, $D_1A_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel BD$ и $B_1D_1 \parallel AC$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также выпуклый, причем $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$.

9. На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2, причём $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$. На отрезке A_1A_2 отмечена точка A_3, а на продолжении этого отрезка за точку A_2 – точка A_4 так, что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$. Аналогично, на отрезке B_1B_2 берётся точка B_3, а на продолжении этого отрезка за точку B_2 – точка B_4 так, что $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k$. Найдите угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4.

10. Докажите, что существует такой невыпуклый шестиугольник, у которого каждый угол равен либо 90°, либо 270°, что его можно разрезать на два подобных ему и неравных между собой шестиугольника.