

Гомотетия и поворотная гомотетия

Большинство задач этого занятия эффективно решаются с помощью гомотетии, хотя, в некоторых случаях (но не во всех!), можно обойтись и подобием треугольников.

Вспомните определение и простейшие свойства гомотетии.

Она часто помогает в тех случаях, когда надо доказать, что три точки лежат на одной прямой. Рассмотрим известную вам конструкцию.

Пример 1. В треугольнике ABC : I и Q – центры вписанной и внеписанной окружностей соответственно, K и M – точки касания этих окружностей со стороной BC , точка F диаметрально противоположна точке K (см. рис.). Докажите, что точки A , F и M лежат на одной прямой

Решение. При гомотетии с центром A и коэффициентом $k = \frac{AQ}{AI}$ внеписанная окружность переходит во вписанную.

Образом касательной BC к внеписанной окружности при указанной гомотетии является касательная $B'C'$ к вписанной окружности, причем $B'C' \parallel BC$ (см. рис.). Поэтому, образом точки M является точка касания $B'C'$ и вписанной окружности, которая совпадает с точкой F , поскольку диаметр FK , перпендикулярный BC , перпендикулярен также и $B'C'$.

Упражнение. На этом же чертеже проведем луч AK , который вторично пересечет внеписанную окружность в точке E . Докажите, что $ME \perp BC$.

Два доказанных утверждения являются «двойственными» для вписанной и внеписанной окружностей, так как эти окружности как бы меняются «ролями». При решении задач вы опять встретитесь с такими «двойственными» утверждениями.

В некоторых случаях полезной бывает поворотная гомотетия: это композиция гомотетии и поворота с общим центром.

Пример 2. Даны два правильных пятиугольника $ABCDE$ и $AKLMN$ (см. рис.). Найдите угол между прямыми BK и DM .

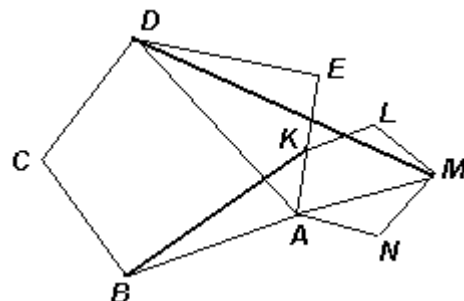
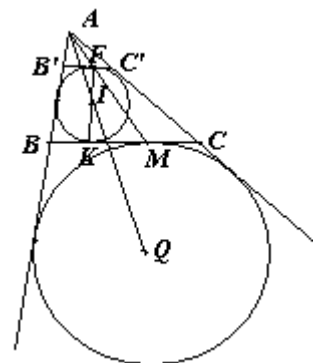
Решение. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке A , переводящую точку B в точку D . Так как коэффициент этой гомотетии равен отношению диагонали и стороны правильного пятиугольника, то образом точки K является точка M . Следовательно, образом прямой BK является прямая DM , а искомый угол равен углу поворота.

Ответ: 72° .

Поворотная гомотетия часто применяется в конструкциях из двух «сцепленных» подобных фигур.

Задачи для самостоятельного решения

1. Через середины сторон треугольника проведены прямые, соответственно параллельные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.
2. На стороне BC треугольника ABC постройте точку M так, чтобы прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из M на прямые AB и AC , была параллельна прямой BC .
3. а) Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей внеписанной окружностью, лежат на одной прямой.
б) Сформулируйте и докажите «двойственное» утверждение.



- 4. (Лемма о сегменте)** Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P . Докажите, что MP – биссектриса угла AMB .
- 5.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена высота CD и перпендикуляр DE к стороне BC , M – середина отрезка DE . Докажите, что прямые AE и CM перпендикулярны.
- 6.** а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр I окружности, вписанной в этот треугольник, проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.
б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке W . Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке K , P – точка пересечения прямой WK с высотой AH . Докажите, что отрезок HP равен радиусу вписанной окружности.
- 7.** а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр Q невписанной окружности, касающейся этой стороны, проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке T . Докажите, что отрезок AT равен радиусу этой невписанной окружности.
б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке W , M – точка касания невписанной окружности со стороной BC , Z – точка пересечения прямой WM с высотой AH . Докажите, что отрезок HZ равен радиусу этой невписанной окружности.
- 8.** В равностороннем треугольнике ABC проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите углы треугольника CDE , где D – точка пересечения медиан треугольника BMN , E – середина отрезка AN .
- 9.** На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные треугольники: $A'BC$, $B'CA$ и $C'AB$ (вершины указаны в порядке соответствия). Докажите, что центры тяжести треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.
- 10.** По двум пересекающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями V_A и V_B соответственно, движутся точки A и B . Докажите, что существует такая точка O , что в любой момент времени $AO : BO = V_A : V_B$ и объясните ее построение.