Серия 25. Точки Шалтая и Болтая

Точкой Шалтая (Humpty point) треугольника ABC называется такая точка P, что $\angle PBA = \angle PAC$, $\angle PBC = \angle PCA$.

Точкой Болтая (Dumpty point) треугольника ABC называется такая точка Q, что $\angle QBA = \angle QCB$, $\angle QBC = \angle QAB$.

1. **Свойства точки Шалтая**

   (a) Точка Шалтая P лежит на описанной окружности треугольника AHC.
   (b) Отражение точки Шалтая P относительно стороны AC лежит на описанной окружности треугольника ABC.
   (c) Точка Шалтая P лежит медиане треугольника ABC.
   (d) Точка Шалтая является проекцией ортоцентра на медиану.

   (*Подсказка:* Воспользуйтесь тем, что окружности (ABC) и (AHC) симметричны относительно середины стороны M.)
   (e) Точка Шалтая P лежит на описанной окружности треугольника A_1HC_1, где A_1 и C_1 – основания высот.
   (f) Пусть A_1C_1 пересекает продолжение стороны AC в точке S. Точка Шалтая P лежит на прямой SH.

   (*Подсказка:* Рассмотрите точку T являющуюся пересечением (ABC) и (A_1BC_1). Докажите, что точки T, H и середина стороны AC лежат на одной прямой.)

2. **Свойства точки Болтая**

   (a) Точка Болтая лежит на описанной окружности треугольника AOC.
   (b) Пусть касательные к (ABC) в точках A и C пересекаются в точке E. Тогда Точка Болтая Q лежит на (AEC).
   (c) Точки B, Q и E лежат на одной прямой.
   (d) Точка Болтая является проекцией центра описанной окружности треугольника на прямую BE (на симедиану треугольника ABC).
   (e) Точка Болтая Q, середины сторон AB и BC, вершина B и центр описанной окружности O лежат на одной окружности.
   (f) (*Дополнительно*: Точки Шалтая и Болтая изогонально сопряжены.)

3. Окружности ω_1 и ω_2 соответственно проходят через вершины A и C треугольника ABC и касаются сторон BC и AB в точке B. Пусть окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D, а прямая AD пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E. Докажите, что D – середина BE.

4. Стороны BC и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ равны. Пусть точка E – отражение B относительно C. Докажите, что отражение точки пересечения диагоналей $ABCD$ относительно BC лежит на описанной окружности треугольника ABE.

5. Точки A_0, B_0 и C_0 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC_0 и CHA_0 окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB_0$.

6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC с углом B равным 60^o отмечены точки Торричелли T ($\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120^o$) и пересечения медиан M. Прямая TM пересекает повторно окружность, описанную около треугольника ACT в точке K. Найдите TM/MK.

7. Внешняя биссектриса угла B треугольника ABC пересекает продолжение стороны AC в точке D. Пусть I – центр вписанной окружности, I_B – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC; а L – середина большей дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $DI \perp LI_b$.

8. Дан неравностороний треугольник ABC. Точки X, Y и Z лежат соответственно на прямых BC, AC и AB таким образом, что $\angle\ AXB = \angle\ BYC = \angle\ CZA$. Описанные окружности треугольников BXZ и CXY пересекаются в точке P. Докажите, что точка P лежит на окружности с диаметром HG, где точки H и G соответственно ортоцентр и центроид треугольника ABC.