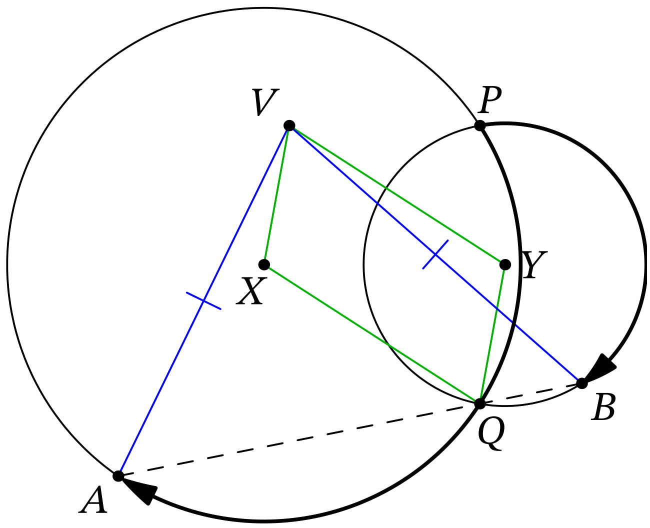
Серия 23. Лемма о двух велосипедистах



1. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, одновременно из точки P по часовой стрелке выехали два велосипедиста A и B с одинаковыми угловыми скоростями.

(a) Докажите, что прямая AB в любой момент времени проходит через точку Q.

(b) На прямой лежат три точки: A, B и Q. Точки X и Y на плоскости такие, что $AX = XQ$ и $BY = YQ$. Пусть $QXVY$ — параллелограмм. Докажите, что $AV = VB$.

(c) **Лемма о двух велосипедистах.** Докажите, что существует такая фиксированная точка V плоскости, что в любой момент времени выполнено $AV = BV$.

2. Сформулируйте и докажите лемму для двух велосипедистов, движущихся по окружностям в разных направлениях.

3. Окружности Ω и ω имеют общий центр O, причём окружность ω лежит внутри окружности Ω. Окружность α касается обеих окружностей внутренним образом, а окружность β касается внутренним образом окружности Ω и внешним — окружности ω.

(a) Докажите, что точка O является точкой двух велосипедистов для окружностей α и β.

(b) Докажите, что прямая, соединяющая точки касания окружностей α и β с окружностью ω, проходит через одну из точек пересечения окружностей α и β.

4. Через точку A, не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках P_1, P_2, другая — в точках Q_1, Q_2. Произвольная прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках M_1 и M_2, а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 — вторично в точках N_1 и N_2 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E, точки M и N — середины диагоналей. Вокруг треугольников ABE, BEC, CED, DEA описаны окружности, причем первая и третья пересекаются вторично в точке L, вторая и четвертая — в точке K. Докажите, что точки M, K, N, L лежат на одной окружности.

6. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на одной окружности с центром в O. Докажите, что угол BFO — прямой.