Серия 22$'$. Линейное движение точек и прямых

Понятное определение. Объект движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t объект параллельно переносится на вектор $t \cdot \vec{v}$.

Формальное определение. Предположим, что для каждого числа $t \in \mathbb{R}$ задано положение точки A_t (либо прямой ℓ_t) на плоскости. Будем говорить, что точка A_t (либо прямая ℓ_t) *движется линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $A_t = A_0 + t \cdot \vec{v}$ (либо $\ell_t = \ell_0 + t \cdot \vec{v}$).

Свойства наследования линейного движения.
I. Середина отрезка между двумя линейно движущимися точками движется линейно.
II. Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно.
III. ***Неверно***, что прямая, проведённая через две линейно движущиеся точки, движется линейно.
IV. Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

1. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках F, E соответственно. На отрезках BF, AE отмечены точки P и Q соответственно так, что $PF = QE$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой EF.

2. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX = AY$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника CXY лежит на диагонали BD.

3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC с центром I отмечена точка X. Из точки X опустили перпендикуляры XP и XQ на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая XI делит отрезок PQ пополам.

4. По сторонам BA и CA угла BAC линейно движутся точки B_t и C_t соответственно. Докажите, что всевозможные окружности (AB_tC_t) проходят через фиксированную точку, отличную от точки A.
   `Hint: рассмотрите движение центра окружности` (AB_tC_t).

5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок AB и прямую AC в точках U и V соответственно. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BU и CV лежат на одной окружности.

6. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. На прямой AO отмечена произвольная точка X. Окружности (ABX) и (ACX) второй раз пересекают прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ равноудалена от точек B и C.

7. Некоторая окружность с центром в точке I пересечения биссектрис треугольника ABC пересекает стороны BC, CA, AB в парах точек X и Y, K и L, M и N соответственно, причём порядок точек на сторонах такой: $B - X - Y - C$, $C - K - L - A$, $A - M - N - B$. Докажите, что прямая, соединяющая вершину A с точкой пересечения прямых XN и YK, делит отрезок XY пополам.

8. (*Финал всероса, 2011.11.2*) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90°$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.