

Серия 22. Линейное движение точек и прямых

Определение. Объект движется *линейно*, если существует такой вектор \vec{v} , что за время t объект параллельно переносится на вектор $t \cdot \vec{v}$.

- Докажите или опровергните:
 - Середина отрезка между двумя линейно движущимися точками движется линейно.
 - Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно.
 - Прямая, проведённая через две линейно движущиеся точки, движется линейно.
 - Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.
- Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB , AC в точках F , E соответственно. На отрезках BF , AE отмечены точки P и Q соответственно так, что $PF = QE$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой EF .
- На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX = AY$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника CXY лежит на диагонали BD .
- По сторонам BA и CA угла BAC линейно движутся точки B_t и C_t соответственно. Докажите, что всевозможные окружности (AB_tC_t) проходят через фиксированную точку, отличную от точки A .
Hint: рассмотрите движение центра окружности (AB_tC_t) .
- Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Прямая, перпендикулярная стороне BC , пересекает отрезок AB и прямую AC в точках U и V соответственно. Докажите, что точки A , O и середины отрезков BU и CV лежат на одной окружности.
- Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O . На прямой AO отмечена произвольная точка X . Окружности (ABX) и (ACX) второй раз пересекают прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ равноудалена от точек B и C .
- Некоторая окружность с центром в точке I пересечения биссектрис треугольника ABC пересекает стороны BC , CA , AB в парах точек X и Y , K и L , M и N соответственно, причём порядок точек на сторонах такой: $B - X - Y - C$, $C - K - L - A$, $A - M - N - B$. Докажите, что прямая, соединяющая вершину A с точкой пересечения прямых XN и YK , делит отрезок XY пополам.
- (Финал всероса, 2011.11.2) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1 , O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT , DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .