Серия 21. Прямая Симсона

Прямая Симсона. Дан треугольник ABC и точка P. Пусть A_1, B_1, C_1 – основания перпендикуляров из точки P на прямые BC, AC, AB соответственно. Тогда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой ℓ_P.

1. Докажите, что для любых точек P и Q на описанной окружности верно равенство $2\angle(\ell_P, \ell_Q) = \overset{\frown}{QP}$.

2. Окружность ω, центр которой лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC треугольника ABC, касается стороны BC в точке A_0, а продолжения стороны AB за точку B – в точке C_0. Докажите, что прямая A_0C_0 проходит через середину стороны AC.

3. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(a) Перпендикуляр из точки P на прямую AC продлили до второго пересечения с описанной окружностью в точке Q. Докажите, что прямая BQ параллельна прямой Симсона точки P.

(b) **Прямая Штейнера.** Точку P отразили симметрично относительно сторон треугольника. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника.

4. Пусть A_0 и C_0 – точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC, K – точка пересечения биссектрисы угла A с прямой A_0C_0. Докажите, что $\angle AKC = 90°$.

5. Дан треугольник ABC. Рассматриваются прямые ℓ, обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные ℓ относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

6. Пусть M и N – середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC соответственно. Вневписанная окружность треугольника ACM касается стороны AM в точке Q, а прямой AC – в точке P. Докажите, что точки P, Q и N лежат на одной прямой.

7. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Пусть AA_1 и CC_1 – биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1, лежит на стороне AC.

8. Докажите, что существуют ровно три точки на описанной окружности, для которых прямая Симсона касается окружности девяти точек, и при этом эти точки образуют равносторонний треугольник.