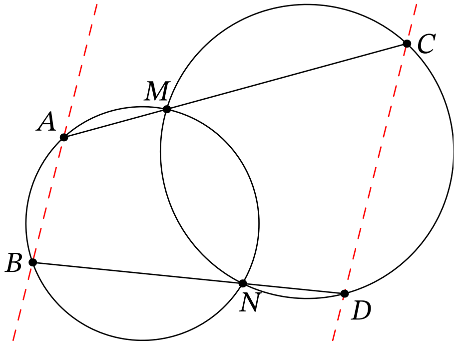
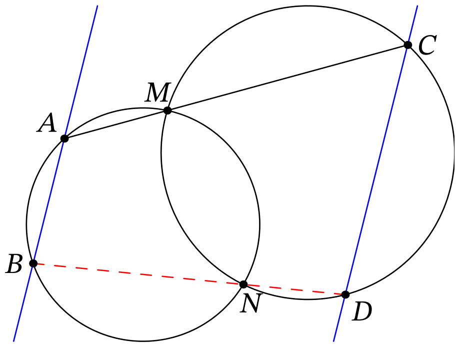
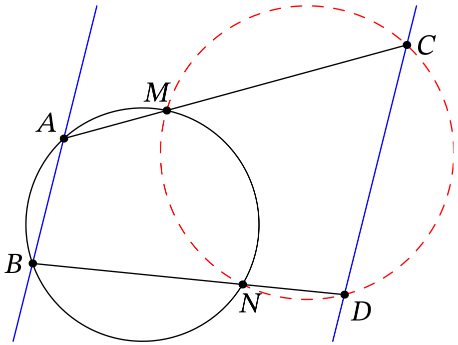
Серия 20. Лемма Фусса

Лемма Фусса. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Две прямые, проведённые через точки M и N, пересекают второй раз окружность S_1 в точках A и C соответственно и вторично пересекают окружность S_2 в точках B и D соответственно. Тогда $AB \parallel CD$.

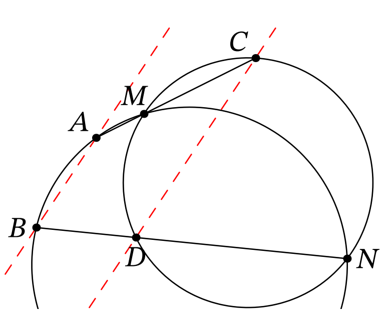


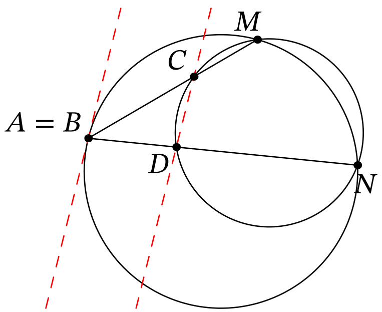
Можно сформулировать и обратные версии леммы (на картинках ниже $AB \parallel CD$):





У конструкции из леммы Фусса есть много разных конфигураций. Например, такие:





0. (*Разбирается сразу*) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге $\overset{\frown}{AB}$ окружности (ABC) взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Окружность треугольника (BDE) пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Из точек A_1 и C_1 опустили перпендикуляры на прямые AB и BC соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через основания этих перпендикуляров, параллельна стороне AC.

2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K, на стороне CD — точка H, и на отрезке KH — точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей (AKM) и (MHC) лежит на диагонали AC.

3. Даны окружности S_1, S_2 и S_3, проходящие через точку X. Вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_2 — точка P, S_2 и S_3 — точка Q, S_3 и S_1 — точка R. На окружности S_1 выбрана произвольная точка A. Вторая точка пересечения прямой AP с окружностью S_2 — точка B, прямой AR с окружностью S_3 — точка C. Докажите, что точки B, C и Q лежат на одной прямой.

4. В треугольнике ABC, в котором $AB = BC$, на стороне AB выбрана точка D. Касательная к окружности (ADC), восстановленная в точке D, второй раз пересекает окружность (BDC) в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

5. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Окружности (AIC_1) и (CIA_1) повторно пересекают дуги $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BC}$ (не содержащие точек B и A соответственно) окружности (ABC) в точках C_2 и A_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на окружности (ABC).

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, вторично пересекающая окружности ω_1 и ω_2 в точках K и M соответственно. Прямая ℓ_1 касается окружности ω_1 в точке Q и параллельна прямой AM. Прямая QA вторично пересекает окружность ω_2 в точке R. Докажите, что:

(a) Касательная ℓ_2, проведённая к окружности ω_2 в точке R, параллельна AK;

(b) Прямые ℓ_1, ℓ_2 и KM имеют общую точку.

7. **Теорема Паскаля.** Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке Q, прямые BC и EF — в точке P, а прямые CD и FA — в точке R. Докажите, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.
Подсказка: проведите окружность (PCF).

8. (*Финал всероса-2009, задача 11.7*) На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Окружности треугольников (AA_1P) и (CC_1P) вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.