Серия 18. Гомотетия

На плоскости дана точка S и зафиксировано вещественное число $k \neq 0$. *Гомотетией* с центром в точке S и коэффициентом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$.

1. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A; окружность ω_b касается прямой b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

3. (*Ключевая задача в листике*) **(a)** Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A. **(b)** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про точки касания вневписанных окружностей ω_B, ω_C с прямой BC.

4. К плоскости прибиты гвоздями окружность ω, точка A на ней и точка T внутри неё. Рассматриваются всевозможные хорды BC, проходящие через T. Докажите, что локусом **(a)** точек пересечения медиан; **(b)** ортоцентров всевозможных треугольников ABC служит некоторая окружность.

5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников напротив вершины A тоже равны.

6. К двум непересекающимся окружностям ω_A и ω_B проведена общая касательная AB, причём $A \in \omega_A$, $B \in \omega_B$. Окружность, построенная на AB как на диаметре, повторно пересекает ω_A в точке A', ω_B в точке B'. Докажите, прямые AB' и $A'B$ пересекаются на линии центров ω_A и ω_B.

7. (*Финал всероса-2018, задача 9.2*) Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается окружности ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает окружности ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

8. (*Финал всероса-2016, задача 9.7*) Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает окружность ω. Касательные, проведённые из точки X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.