[ЦПМ, кружок по геометрии, 8 класс] А. Кушнир, Е. Лычагина, А. Соколов

[*2020-2021*] группа: 8 класс *02 февраля 2021 г.*

Серия 15. Теорема Менелая

1. На прямой AB отмечены точки X и Y, отличные от A и B. Докажите, что

$$X = Y \Longleftrightarrow \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YB}}.$$

2. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно. Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, если и только если выполнено соотношение

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

(a) Докажите, что если точки лежат на одной прямой, то соотношение выполнено.

(b) Докажите, что если соотношение выполнено, то точки лежат на одной прямой.

3. Докажите, что основания внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.

4. Окружность касается сторон AB, BC, CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L, M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB.

5. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1. Вневписанная окружность касается продолжения сторону BC за точку C в точке A_1. Докажите, что B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой.

6. Смотрите первую картинку. Докажите, что $x = y$.

7. Смотрите вторую картинку.

8. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Точки I_a, I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABD и CBD. Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q. Докажите, что $\angle DBQ = 90^\circ$.