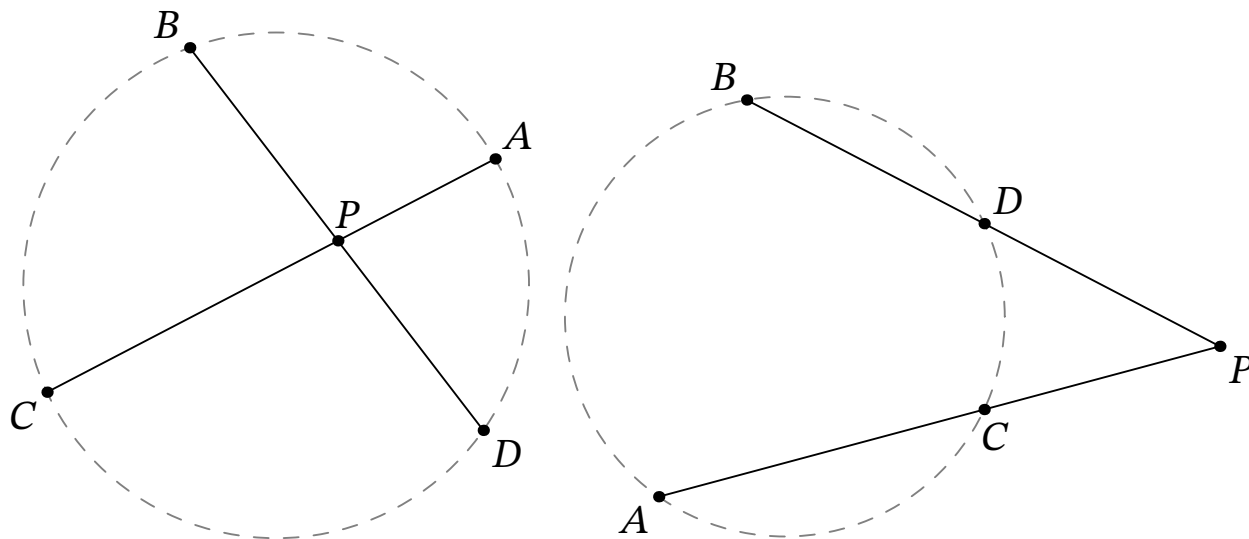


Серия 14. Степень точки относительно окружности



1. Для обеих картинок сверху докажите, что выполнено равенство $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

Определение. Степенью точки P относительно окружности ω называется величина $\pm PA \cdot PC$, где A и C — точки пересечения произвольной секущей через точку P с окружностью ω . Эта величина обозначается $\deg(P, \omega)$. Если точка P лежит вне окружности, то произведение берётся со знаком «+», а если внутри — то со знаком «−».

2. Докажите, что для точки вне окружности её степень равна квадрату длины отрезка касательной к этой окружности.
3. К двум окружностям ω_1 и ω_2 , пересекающимся в точках P и Q , проведена общая касательная AB ($A \in \omega_1$ и $B \in \omega_2$). Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.
4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P , причём $\angle APB < 90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведённых из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

Метрический критерий вписанности. Точки A, B, C, D на картинках сверху лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

Иногда вписанность четырёхугольника удобнее доказывать не равенством уголков, а именно с помощью метрического критерия вписанности.

5. Из точки P вне окружности ω с центром в точке O проведены касательные PA и PB к окружности ω (A и B — точки касания), а также через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках C и D . Докажите, что окружность (COD) проходит через середину отрезка AB .
6. Через центр I вписанной в неравносторонний треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K .

Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID . Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H , а O — центр его описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная точке A относительно прямой B_1C_1 , лежит на окружности ($OH A_1$).
8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1 , продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N . Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.