Серия 13. Теорема Фалеса

Теорема Фалеса. На одной прямой отмечены точки A_1, B_1, C_1, на другой — A_2, B_2, C_2. Тогда если $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, то $\overline{A_1B_1}/\overline{B_1C_1} = \overline{A_2B_2}/\overline{B_2C_2}$.

1. Изначально жук сидит
   (a) на стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Он четыре раза последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно диагоналям AC, BD, AC, BD.
   (b) на стороне AB треугольника ABC. Он шесть раз последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно сторонам CA, AB, BC, CA, AB, BC.
   Докажите, что жук вернулся в исходную точку.

2. *Свойство биссектрисы.* Пусть AD — **(a)** внутренняя; **(b)** внешняя биссектриса неравнобедренного треугольника ABC. Докажите, что $BD/DC = AB/AC$.

3. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 и на стороне BC отмечена точка X. На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1$, $NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.

4. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\dfrac{AB}{AX} + \dfrac{AD}{AY} = \dfrac{AC}{AZ}$.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C — прямые. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BX и DY на диагональ AC. Докажите, что $AX = CY$.

6. В окружность вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, причём отрезок AD — диаметр окружности. Точки M, K, N — середины отрезков AB, BC, CD соответственно. Докажите, что прямая MN параллельна прямой, соединяющей центры описанных окружностей треугольников ABK и CDK.

7. В неравнобедренном треугольнике ABC через точку, делящую ломаную BAC пополам, провели прямую ℓ_A, параллельную биссектрисе угла BAC. Аналогично определены прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C пересекаются в одной точке.

8. На сторонах AB, AC остроугольного треугольника ABC отметили соответственно такие точки M и N, что $MN \parallel BC$. Описанные окружности треугольников ABB и ACM повтороно пересекают BC в точках P и Q соответственно. Прямые BN и MQ пересекаются в точке E, а прямые CM и NP пересекаются в точке F. Докажите, что $\angle EAB = \angle FAC$.