# Серия 12. Лемма о трезубце

**Лемма о трезубце.** Пусть $I$ и $I_A$ — центры вписанной и вневписанной (касающейся стороны $BC$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$) окружностей треугольника $ABC$ соответственно. Тогда точки $B$, $C$, $I$, $I_A$ лежат на одной окружности с центром в середине «меньшей» дуги $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$.

1. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг $AB$ и $AC$ описанной окружности треугольника $ABC$, пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где $I$ — центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности.

2. **Внешняя лемма о трезубце.** Пусть $I_B$ и $I_C$ — центры вневписанных окружностей треугольника $ABC$, касающихся сторон $AC$ и $AB$ соответственно. Тогда точки $B$, $C$, $I_B$, $I_C$ лежат на одной окружности с центром в середине «большей» дуги $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$.

3. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$. Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

4. Биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают его описанную окружность в точках $B_0$ и $C_0$ соответственно и пересекают друг друга в точке $I$. Окружности $\omega_B$ и $\omega_C$ с центрами $B_0$ и $C_0$ касаются отрезков $AC$ и $AB$ соответственно. Докажите, что и через точку $A$, и через точку $I$ можно провести прямую, касающуюся обеих окружностей $\omega_B$ и $\omega_C$.

5. На «меньших» дугах $AB$, $AC$ описанной окружности треугольника $ABC$ отмечены точки $M$ и $N$ соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников $ABM$ и $ACN$ равноудалены от середины дуги $BAC$.

6. В треугольнике $ABC$ ($AB < BC$) точка $M$ — середина $AC$, точка $N$ — середина дуги $ABC$ описанной окружности треугольника. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.