А. Кушнир, Е. Лычагина, А. Соколов

Серия 11. Двигаем точки

1. В середине лестницы, приставленной к стене, сидит котенок. Лестница начинает скользить по стене и полу. Какую траекторию будет описывать котенок?

2. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC движется по некоторой окружности.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно с одинаковыми угловыми скоростями[1] стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. Докажите, что прямая, соединяющая их, всё время проходит через точку B.

4. Через точку P вне окружности Ω провели произвольную прямую ℓ, пересекающую Ω. Прямую ℓ начинают вращать вокруг точки P. Докажите, что середина хорды, высекаемой на прямой ℓ окружностью Ω, всё время лежит на одной окружности.

5. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I пересечения биссектрис треугольника ABC тоже движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I.

6. Решите предыдущую задачу, при условии, что вместо точки I рассматривается центры трёх вневписанных окружностей треугольника ABC.

7. **(a)** Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ такая, что $\angle A = \angle B = 90°$. Пусть M — середина CD. Докажите, что $AM = BM$.
(b) На прямой лежат три точки: A, B и C. Точки X и Y на плоскости такие, что $AX = XB$ и $BY = YC$. Пусть $BXZY$ — параллелограмм. Докажите, что $AZ = CZ$.
(c) Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.

[1] Что это?