

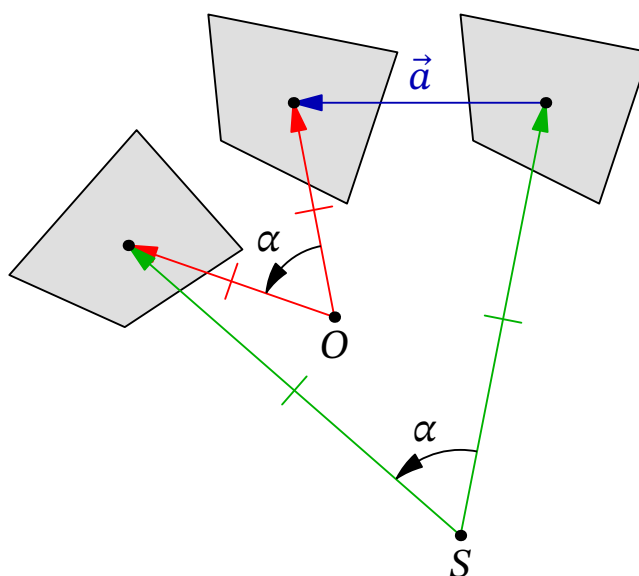
Серия 10. Композиция движений

Движением называется произвольное преобразование плоскости f , сохраняющее расстояние между парами точек, т. е. для любых точек A и B плоскости выполнено $\text{dist}(f(A), f(B)) = \text{dist}(A, B)$.

Композицией движений f и g называется преобразование плоскости $h = g \circ f$, определяемое следующим образом: $h(X) = g(f(X))$. Ясно, что композиция движений — движение.

Известные движения: *центральная симметрия, осевая симметрия, параллельный перенос, поворот, скользящая симметрия.*

Скольльзящей симметрией называют композицию осевой симметрии относительно некоторой прямой ℓ и переноса вдоль прямой ℓ .



1. Даны два равных треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное движение, которое переводит один треугольник в другой (соответственные вершины — в соответственные).
2. Докажите, что любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, симметрии.
3. Проверьте, что
 - (a) композиция двух осевых симметрий относительно двух параллельных осей ℓ_1 и ℓ_2 является параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим осям, направленный от ℓ_1 к ℓ_2 , длина которого равна удвоенному расстоянию между осями;
 - (b) композиция двух осевых симметрий относительно двух пересекающихся осей ℓ_1 и ℓ_2 является поворотом относительно точки их пересечения на удвоенный угол между осями;

В двух следующих пунктах попробуйте угадать неподвижную точку композиции движений. Эта неподвижная точка и будет центром искомого поворота.

- (c) композиция параллельного переноса на вектор \vec{a} и поворота на ненулевой угол α является поворотом (с другим центром) на угол α ;
- (d) композиция двух поворотов на углы α и β с различными центрами является поворотом на угол $\alpha + \beta$, если $\alpha + \beta \neq k \cdot 360^\circ$, и параллельным переносом в противном случае.

4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. На его сторонах AB, BC, CD, DE и EA построили во внешнюю сторону равносторонние треугольники ABP, BCQ, CDR, DES и EAT , а затем стерли все точки, кроме P, Q, R, S и T . Как с помощью циркуля и линейки восстановить исходный пятиугольник?
5. Для каждого нечетного n впишите в данную окружность n -угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.