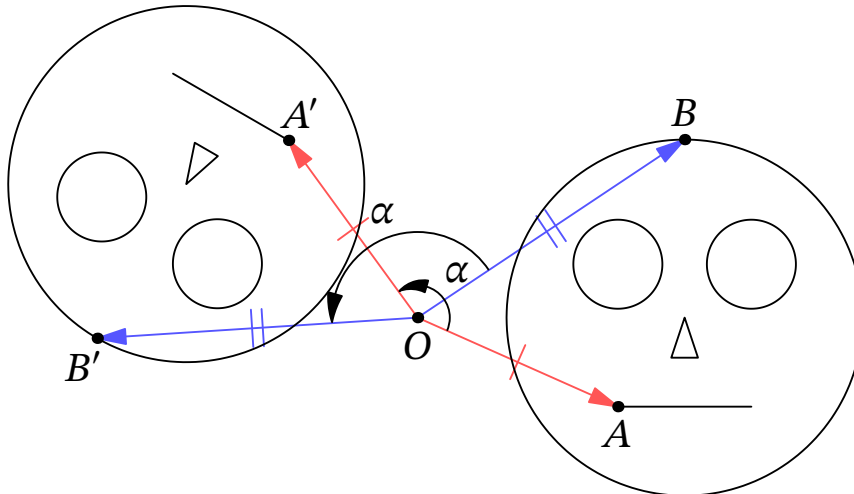


Серия 9. Поворот

На плоскости дана точка O и зафиксировано вещественное число α .

Поворотом с центром в точке O и углом α называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $|OA| = |OA'|$ и $\angle AOA' = \alpha$.



1. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , B_1AC и C_1AB . Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
2. В ромбе $ABCD$ угол B равен 120° . На сторонах AB и BC взяты точки P и Q , причём $AP = BQ$. Докажите, что треугольник PQD правильный.
3. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X . Докажите, что прямые, проведённые через вершины B, C, D, A перпендикулярно прямым AX, BX, CX, DX соответственно, пересекаются в одной точке.
4. Точка P лежит на дуге \widehat{BC} описанной окружности равностороннего треугольника ABC . Докажите, что $PB + PC = AP$.
5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 . На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C — середина отрезка C_1C_2 .
6. В ромбе $ABCD$ угол B равен 120° . Через вершину A провели прямую, пересекающую сторону CD и продолжение стороны BC в точках P и Q соответственно. Найдите угол между прямыми BP и DQ .
7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC .
8. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники $ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1$ и FAB_1 . Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.