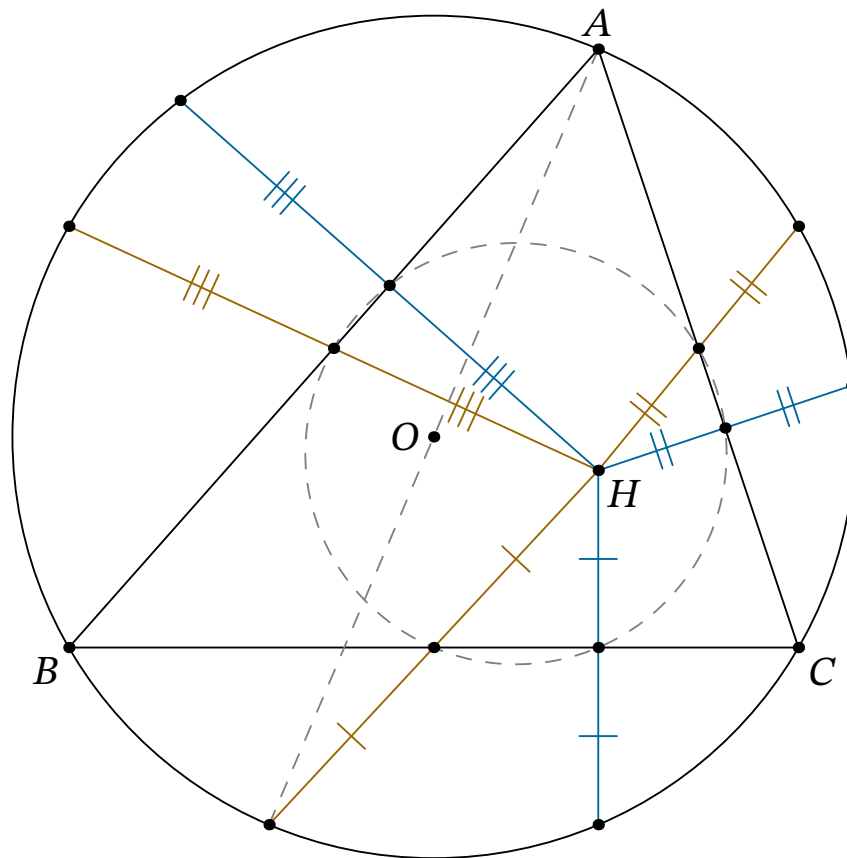


## Серия 7. Ортоцентр



**Лемма (об отражении ортоцентра).** Отражения ортоцентра относительно сторон и относительно середин сторон треугольника попадают на его описанную окружность; причём отражения ортоцентра относительно середин сторон диаметрально противоположны соответствующим вершинам треугольника.

1. Окинув беглым взглядом картинку выше, докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника  $ABC$  до стороны  $BC$  вдвое меньше длины отрезка  $AH$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника.
2. **(а)** В остроугольном треугольнике  $ABC$  отмечен ортоцентр  $H$ . Докажите, что окружности  $(ABC)$ ,  $(BCH)$ ,  $(CAH)$ ,  $(ABH)$  равны. **(б)** Три равные окружности проходят через точку  $P$  и пересекаются попарно повторно в точках  $X, Y, Z$ . Докажите, что окружность  $(XYZ)$  равна трём исходным окружностям.

*Отныне и навсегда будем обозначать описанную окружность треугольника  $PQR$  символом  $(PQR)$ .*

3. Высоты  $BD$  и  $CE$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Известно, что  $\angle BAC = 45^\circ$ . Докажите, что четырёхугольник  $OEND$  — параллелограмм.
4. Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$  пересека-

ются в точке  $H$ . Описанная окружность треугольника  $AB_1C_1$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  вторично в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $KH$  делит отрезок  $BC$  пополам.

5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Докажите, что треугольник, вершинами которого являются ортоцентры треугольников  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  и  $CA_1B_1$ , равен треугольнику  $A_1B_1C_1$ .
6. Диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что перпендикуляры из середин двух соседних сторон к противоположным сторонам пересекаются на диагонали.
7. В остроугольном треугольнике  $ABC$  отмечен ортоцентр  $H$  и середина  $M$  стороны  $BC$ . Прямая, проходящая через  $H$  и перпендикулярная  $HM$ , пересекает стороны  $AC$ ,  $AB$  в точках  $B_1$ ,  $C_1$ . Докажите, что точка  $H$  — середина отрезка  $B_1C_1$ .
8. В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  отметили ортоцентр  $H$ , центр описанной окружности  $O$  и провели высоту  $AD$ . Докажите, что образ центра описанной окружности треугольника  $DHO$  при симметрии относительно прямой  $OH$  лежит на средней линии исходного треугольника, параллельной стороне  $BC$ .