Серия 6. Угол между хордой и касательной

Теорема. На окружности ω отмечены точки A и B, через точку A проведена прямая ℓ. Тогда ℓ касается ω, если и только если $\angle(\ell, AB)$ равен половине меры дуги $\overset{\frown}{AB}$.

1. Касательная к описанной окружности неравноберенного треугольника ABC, восстановленная в вершине A, пересекает прямую BC в точке S; точка L — основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.

2. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ.

3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC, восстановленные в точке H, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.

4. На стороне AB остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка X. Касательная к описанной окружности треугольника BXC, восстановленная в вершине X, пересекает описанную окружность треугольника ACX в точках X и Y. Докажите, что $AY \parallel BC$.

5. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности Ω в точке B, а окружности Ω в точке A. Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN.

6. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle BAC = 90°$. На «меньших» дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.

7. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$; O, I — центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность ω описана вокруг треугольника BIO и пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Докажите, что AD — касательная к ω.

8. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Прямые BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через C' параллельно AC, касается описанной окружности треугольника $B'OC$.