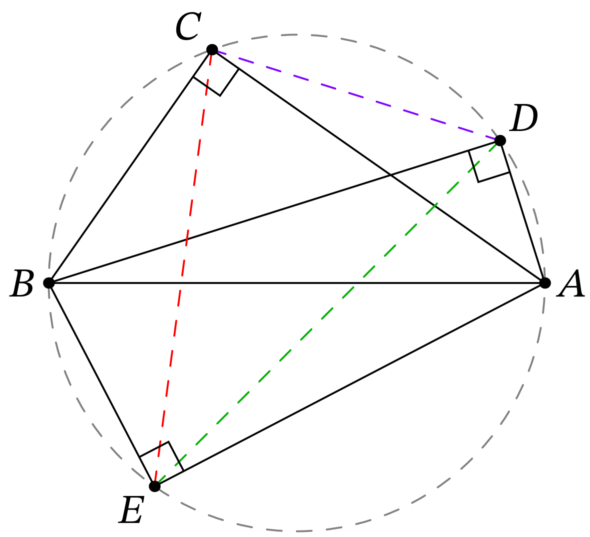
Серия 5. Прямые углы и вписанные четырёхугольники



Проекцией точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту прямую.

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что H — точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

2. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка X. Пусть U и V — проекции точки X на прямые AB, AC соответственно. Докажите, что точки B, C, U, V лежат на одной окружности.

3. Высоты BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка S — центр описанной окружности треугольника BHC. Докажите, что $SH \perp B_1C_1$.

4. (*Теорема Симсона*) На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P. Докажите, что три проекции точки P на прямые, содержащие стороны треугольника, лежат на одной прямой.

5. Докажите, что четыре проекции основания A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC на стороны AB, AC и на высоты BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > AC$) проведена высота AA_1 и отмечены центр O описанной окружности и середина M стороны BC. Проекцию вершины B на прямую AO обозначим через T. Докажите, что $MT = MA_1$.

7. Докажите, что в любом остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.

8. В остроугольном треугольнике ABC на продолжениях высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 отметили точки B_2 и C_2 соответственно так, что $\angle B_2AC_2 = 90^\circ$. Точка K — проекция вершины A на прямую B_2C_2. Докажите, что $\angle BKC = 90^\circ$.