Серия 4. Отрезки касательных.

1. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. **(a)** Докажите, что M равноудалена от точек касания вписанной и вневписанной окружностей с отрезком BC. **(b)** Докажите, что M равноудалена от точек касания вневписанных окружностей с продолжениями стороны BC.

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B — окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC. **(a)** Докажите, что если ω_D и ω_B касаются, то в $ABCD$ можно вписать окружность. **(b)** Докажите, что если $ABCD$ — описанный четырёхугольник, то ω_D и ω_B касаются.

3. Лучи AB и DC четырехугольника пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q. Докажите, что если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то **(a)** $AB + CD = AD + BC$; **(b)** $PC + AQ = QC + AP$; **(c)** $PD + DQ = PB + BQ$.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AB и AD в точках M и N. Вписанная окружность треугольника CBD касается его сторон CB и CD в точках P и Q. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной прямой.

5. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая ℓ, лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB, продолжения стороны BC за точку B и прямой ℓ в точке P. Окружность ω_C касается отрезка AC, продолжения стороны BC за точку C и прямой ℓ в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой ℓ.

6. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X. Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX, отличная от BC, пересекает отрезок AX в точке Y. Докажите, что длина отрезка AY не зависит от выбора точки X.

7. На каждой стороне четырехугольника $ABCD$ взято по две точки, и они соединены так, как показано на рисунке. Докажите, что если все пять черных четырехугольника являются описанными, то четырехугольник $ABCD$ тоже описанный.