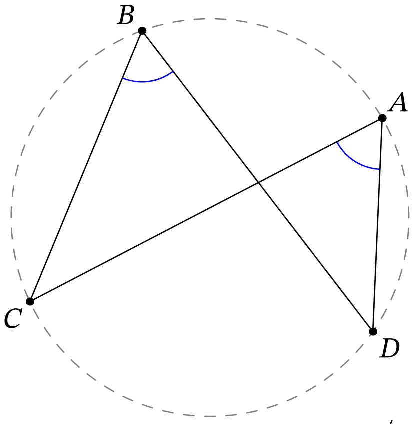
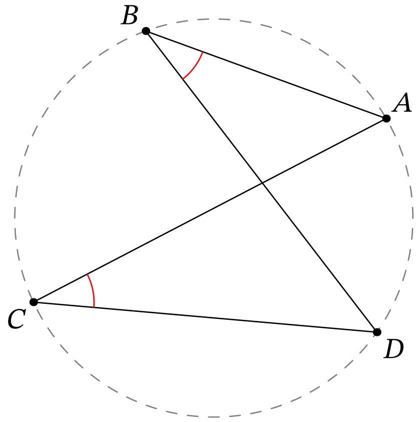
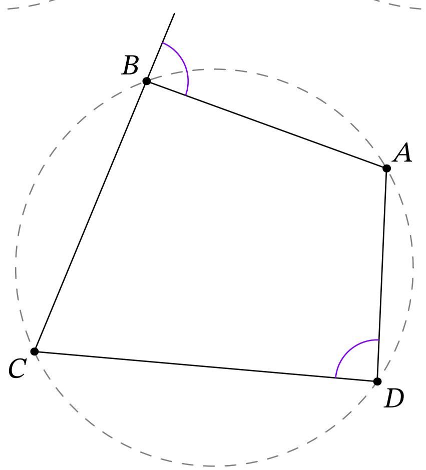
# Серия 2. Критерий вписанности четырёхугольника

**Теорема.** Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из эквивалентных условий:

**(1)** $\angle CAD = \angle CBD$; **(2)** $\angle ABD = \angle ACD$; **(3)** $\angle ABC + \angle ADC = 180°$;




1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, точка $K$ — середина *«меньшей»* дуги $\overset{\frown}{AB}$ (т. е. не содержащей точек $C$ и $D$). Пусть $P$ и $Q$ — точки пересечения пар хорд $CK$ и $AB$, $DK$ и $AB$ соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

2. На хорде $AB$ окружности $\Omega$ с центром в точке $O$ отмечена точка $X$. Описанная окружность треугольника $AXO$ пересекает окружность $\Omega$ в точках $A$ и $Y$, причём точки $O$ и $Y$ лежат по разные стороны от прямой $AB$. Докажите, что $XY = XB$.

3. В окружность с центром в точке $O$ вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Диагонали трапеции пересекаются в точке $K$. Докажите, что точки $A$, $B$, $K$, $O$ лежат на одной окружности.

4. В остроугольном треугольнике $ABC$ с углом $\angle A = 60°$ отмечены точки $H$, $I$, $O$ — ортоцентр и центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника $HIO$ проходит через вершину $B$.

5. В окружность вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AE = DE$. Диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $P$. На продолжении стороны $AB$ за точку $A$ отмечена такая точка $Q$, что $AQ = DP$. На продолжении стороны $DC$ за точку $D$ отмечена такая точка $R$, что $DR = AP$. Докажите, что $PE \perp QR$.

6. На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Окружность, описанная около треугольника $ADB$, пересекает сторону $AC$ в точке $M$, а окружность, описанная около треугольника $ADC$, пересекает сторону $AB$ в точке $N$ ($M, N \neq A$). Пусть $O$ — центр описанной окружности треугольника $AMN$. Докажите, что $OD \perp BC$.

7. На диагонали $AC$ ромба $ABCD$ взята произвольная точка $E$, отличная от точек $A$ и $C$, а на прямых $AB$ и $BC$ — точки $N$ и $M$ соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть $K$ — точка пересечения прямых $AM$ и $CN$. Докажите, что точки $K$, $E$ и $D$ лежат на одной прямой.

8. (*Региональный этап всероса-2017, задача 10.8*) Окружность $\Omega$ описана около остроугольного треугольника $ABC$. На стороне $AB$ выбрана точка $D$, а на стороне $AC$ — точка $E$ так, что $BC \parallel DE$. Точки $P$ и $Q$ на «меньшей» дуге $BC$ окружности $\Omega$ таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи $QB$ и $PC$ пересекают прямую $DE$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180°$.