Серия 1. Меры дуг окружности и вписанные углы

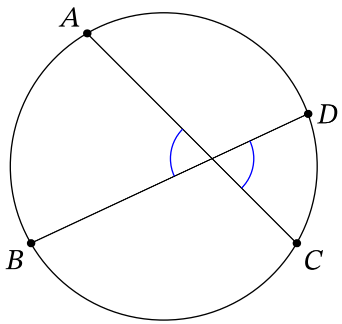
Определения. Предположим, что на окружности Ω с центром в точке O отмечены точки A, B. Рассмотрим дугу $\overset{\frown}{AB}$. *Мерой* дуги $\overset{\frown}{AB}$ назовём величину *центрального* угла AOB (центральный угол может быть больше $180°$; вся дуга должна быть внутри центрального угла). Для произвольной точки X окружности Ω вне дуги $\overset{\frown}{AB}$ угол AXB будет называть *вписанным* углом, опирающимся на дугу $\overset{\frown}{BC}$.

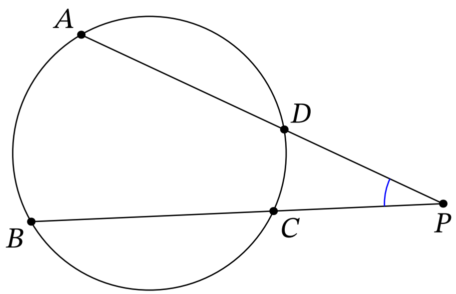
Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

Отныне и навсегда в рамках нашего кружка по геометрии под «меньшей» дугой $\overset{\frown}{XY}$ будет пониматься та из двух возможных дуг $\overset{\frown}{XY}$, которая не содержит других отмеченных точек; вторую дугу $\overset{\frown}{XY}$ будет называть «бóльшей».

1. Точки M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC соответственно. Докажите, что **(a)** прямая AM — биссектриса угла BAC; **(b)** прямая AN — биссектриса внешнего угла BAC.

2. (*Невероятно полезная задача*) **(a)** Докажите, что величина отмеченного угла на первой картинке равна полусумме мер «меньших» дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$. **(b)** Докажите, что величина отмеченного угла на второй картинке равна полуразности мер «меньших» дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$.





3. На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D. Точки K, L, M, N — середины «меньших» дуг $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

4. Точка D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно прямой BC. Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что прямая AD — биссектриса угла PAQ.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка S, что
$$\angle BSC = \angle BAC + 60°, \angle CSA = \angle CBA + 60°, \angle ASB = \angle ACB + 60°.$$
Лучи AS, BS, CS продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон. Его вершины разбивают окружность на четыре дуги. Рассматриваются восемь прямых: две прямые, соединяющие середины противоположных дуг; две биссектрисы угла между прямыми AC и BD; две биссектрисы угла между прямыми AB и CD; две биссектрисы угла между прямыми AD и BC. Докажите, что эти восемь прямых можно раскрасить в красный и в синий цвета так, чтобы одноцветные прямые были параллельны.

7. (**IMO-2020.1**) Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка P, что выполняются равенства
$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$
Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB.

8. (*Финал всероса-2007, 9-4*) В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AL. Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает «меньшую» дугу $\overset{\frown}{AC}$ описанной окружности Ω треугольника ABC в точке D. Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что точки D, K и середина «меньшей» дуги $\overset{\frown}{BC}$ окружности Ω лежат на одной прямой.