Задачи, решаемые выходом в пространство

Большинству из вас в детстве предлагали такую задачу: можно ли из шести одинаковых спичек сложить четыре равносторонних треугольника так, чтобы стороной каждого из них была целая спичка?

После безуспешных попыток сделать это на плоскости стола, некоторые догадывались, что это можно сделать в пространстве, то есть сложить из шести спичек правильный тетраэдр. Тогда его грани являются искомыми треугольниками.

При решении некоторых планиметрических задач бывает полезно соображение, что плоскость расположена в пространстве, поэтому для их решения можно рассматривать вспомогательные элементы, расположенные вне исходной плоскости. Такой метод решения планиметрических задач носит название ***выход в пространство***.

Проиллюстрируем этот метод на нескольких примерах.

Пример 1. (*Теорема Дезарга*) Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены так, что прямые A_1A_2, B_1B_2 *и* C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 *и* C_2A_2 лежат на одной прямой.

Решение. Посмотрим на эту конструкцию (см. рис. 1) как на стереометрическую: в пирамиде $PA_2B_2C_2$ проведено сечение $A_1B_1C_1$. Тогда три точки пересечения указанных прямых X, Y и Z лежат на линии пересечения плоскостей сечения и основания, то есть на одной прямой.

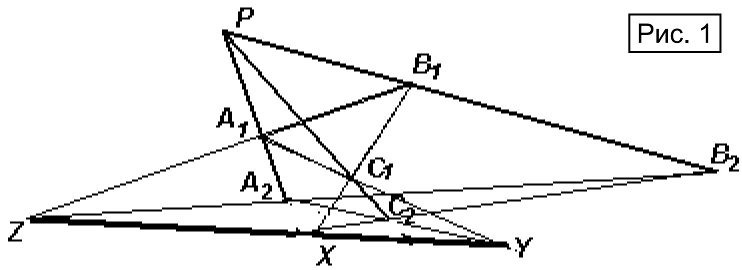

Рис. 1

Если быть формалистами, то надо еще на планиметрической картинке построить стереометрическую, но этим мы заниматься не будем .

Выполняется ли утверждение теоремы в случае, если какие-то пары указанных прямых параллельны? Да, только их пересечения это бесконечно удаленные точки, то есть речь пойдет о ***проективной плоскости***.

Треугольники, расположенные таким образом, называются ***перспективными***.

Пример 2. (*Частный случай теоремы о композиции гомотетий или «задача о колпаках»*). На плоскости даны три окружности попарно различных радиусов. К каждой паре окружностей проведены две общие внешние касательные. Докажите, что три точки пересечения пар этих касательных лежат на одной прямой.

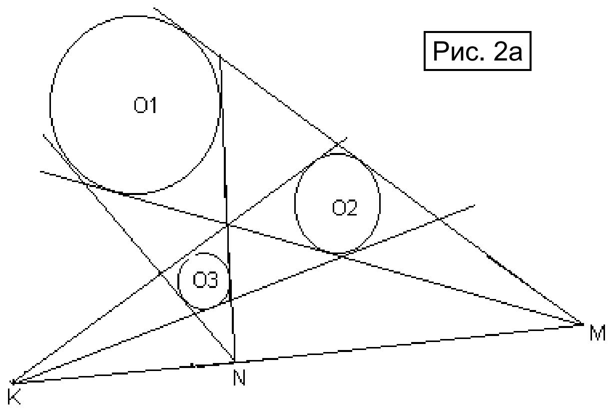

Рис. 2а

Решение. <u>Первый способ</u>. Рассмотрим три сферы с центрами O_1, O_2 и O_3, попарно вписанные в конические поверхности с вершинами M, N и K (см. рис. 2а). Тогда, точки M, N и K принадлежат плоскости $O_1O_2O_3$.

Рассмотрим плоскость α, касательную и опорную к этим сферам, тогда точки M, N и K принадлежат α. Следовательно, они лежат на прямой пересечения этих плоскостей.

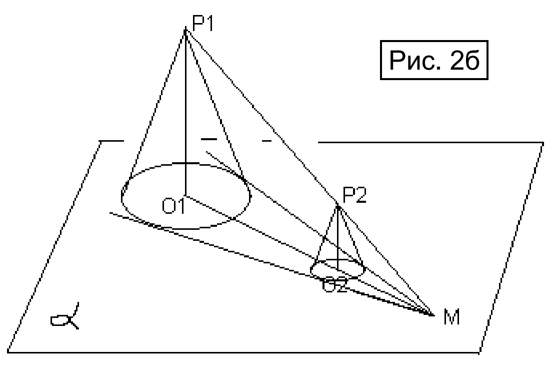

Рис. 2б

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим три конуса, основания которых – круги с центрами O_1, O_2 и O_3, а высоты P_1O_1, P_2O_2 и P_3O_3 соответственно пропорциональны радиусам оснований R_1, R_2 и R_3 (вершины P_1, P_2 и P_3 лежат в одном

полупространстве относительно данной плоскости α).

Теперь рассмотрим, например, точку M – центр гомотетии, переводящей окружность с центром O_1 в окружность с центром O_2. Так как коэффициент этой гомотетии $k = \frac{R_2}{R_1} = \frac{P_2O_2}{P_1O_1}$, то $P_1P_2 \cap \alpha = M$ (см. рис. 2б). Аналогично, $P_1P_3 \cap \alpha = N$; $P_2P_3 \cap \alpha = K$. Следовательно, точки M, N и K лежат на прямой пересечения плоскостей $P_1P_2P_3$ и α.

Некоторые и предлагаемых вам задач решаются и без выхода в пространство, но нашей целью является отработка именно этого метода. Чертой отделены две задачи, не требующие выхода в пространство, но при решении которых может быть применена теорема Дезарга.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Дезарга.

2. Используя выход в пространство, докажите лемму о трех хордах: «На плоскости даны три попарно пересекающихся круга так, что пересечение всех трех кругов не пусто. К каждой паре кругов проведена общая хорда. Тогда эти три хорды пересекаются в одной точке».

3. На сторонах BC и AC правильного треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков AX, BY и XY можно составить треугольник.

4. По четырем попарно пересекающимся дорогам издалека с постоянными скоростями идут 4 человека. Известно, что первый встретится со вторым, с третьим и с четвертым; второй встретится с третьим и с четвертым, причем «тройных» встреч не будет. Встретятся ли третий и четвертый?

5. На плоскости проведены: а) три параллельные прямые; б) три луча с общим началом. Даны три точки, не лежащие на одной прямой, и не принадлежащие ни одной из данных прямых (лежащие по одной между соседними лучами). Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых (лучах), а стороны (или их продолжения) содержат заданные точки.

6. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N так, что $CM + CN = AB$. Прямые AM и AN делят диагональ BD на три отрезка. Докажите, что из этих отрезков можно всегда составить треугольник, причем один из углов этого треугольника равен $60°$.

7. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что прямые KL, MN и AC либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

8. Правильный шестиугольник разрезан на равновеликие параллелограммы. Докажите, что количество параллелограммов кратно трем.

---

9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Описанная окружность треугольника PMQ вторично пересекает прямую BC в точке X. Докажите, что $BH = CX$.

10. На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Пусть X, Y и Z – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, CMD и AMD соответственно; H_x, H_y и H_z – ортоцентры треугольников AXB, CYD и AZD соответственно. Докажите, что точки H_x, H_y и H_z лежат на одной прямой.