

## Симедиана треугольника\_2

Продолжим изучение конструкций, связанных с симедианой треугольника.

1. А) Используя рис. 1, вспомните, два основных вида определения симедианы треугольника.
- Б) Вспомните основное свойство и признак симедианы.
- В) Сформулируйте определения симедианы как геометрического места точек.

Поищем теперь на симедиане «хорошие» точки.

### 2. Гармонический четырехугольник.

Продлим симедиану до пересечения с описанной окружностью.

**Пусть в треугольнике  $ABC$  симедиана  $AS$  пересекает описанную около него окружность в точке  $D$  (см. рис. 2). Тогда  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .**

**Доказательство.** Так как точка  $D$  лежит на симедиане, то

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB^2}{AC^2}. \text{ С другой стороны, } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB \cdot DB \cdot \sin \angle ABD}{AC \cdot DC \cdot \sin \angle ACD}.$$

Приравняв правые части и используя, что  $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$ , получим искомое равенство.

Верно и обратное утверждение: **если точка  $D$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , и**

**$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ , то луч  $AD$  содержит симедиану**

**треугольника. Доказательство аналогично.**

**Следствия** (см. рис. 3, обоснуйте!).

- 1) Биссектрисы углов  $BAC$  и  $BDC$  пересекаются на стороне  $BC$ .
- 2) Точка  $D$  лежит на **окружности Аполлония** треугольника  $ABC$ .
- 3)  $AB \cdot DC = AC \cdot DB$  (вписанный четырехугольник  $ABCD$ , для которого выполняется это равенство, называется **гармоническим**)
- 4) Вписанный четырехугольник является **гармоническим** тогда и только тогда, когда каждая его диагональ является **симедианой** треугольников, на которые его разбивает другая диагональ.

### 3. Основная задача о симедиане.

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

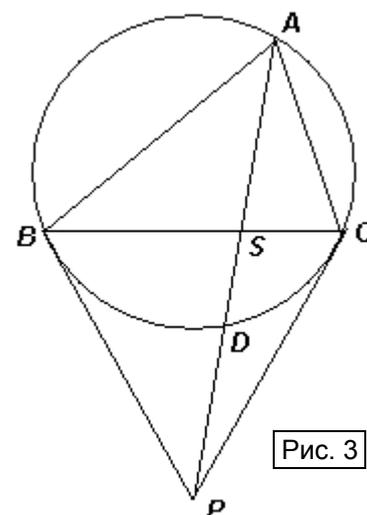
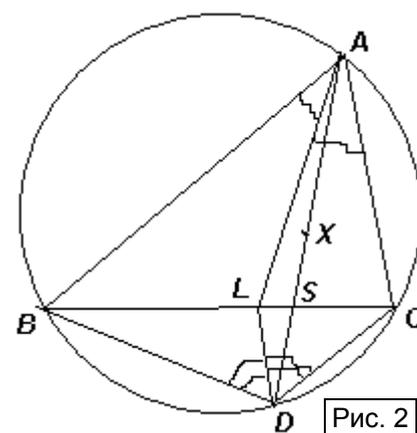
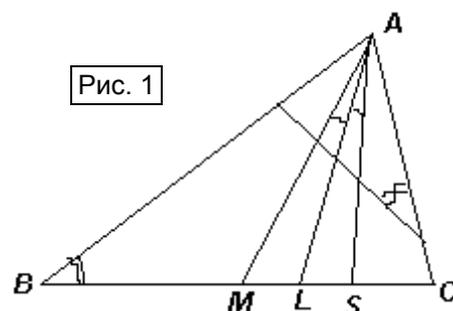
**Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в вершинах  $B$  и  $C$ , пересекаются в точке  $P$ . Тогда прямая  $AP$  содержит симедиану треугольника  $ABC$ .**

*Это утверждение можно доказывать многими различными способами. Выберем тот, который использует уже доказанное.*

**Доказательство.** Используем равенство угла между касательной и хордой и соответствующего вписанного угла, равенство отрезков касательных  $PB$  и  $PC$ , теорему синусов в

треугольнике  $ABC$  (см. рис. 3):  $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin \angle ABP}{AC \cdot PC \cdot \sin \angle ACP} =$

$$\frac{AB \cdot \sin \angle ACB}{AC \cdot \sin \angle ABC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \text{ Следовательно, } AP \text{ – симедиана треугольника } ABC.$$



Знание рассмотренных фактов позволит вам решить сложные задачи, большинство из которых предлагались на разных этапах Всероссийской олимпиады или на олимпиадах по геометрии.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Дан треугольник  $ABC$  и такая точка  $X$  внутри него, что  $\angle ABX = \angle CAH$  и  $\angle BAX = \angle ACX$ . Луч  $AX$  пересекает  $BC$  в точке  $S$ . Докажите, что: а)  $XS$  – биссектриса треугольника  $BXC$ ; б)  $AS$  – симедиана треугольника  $ABC$ ; в)  $X$  – середина отрезка  $AD$ , где  $D$  – точка пересечения луча  $AX$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ .
2. Окружность  $\omega_1$  проходит через точки  $A$  и  $B$  и касается прямой  $AC$ , а окружность  $\omega_2$  проходит через точки  $A$  и  $C$  и касается прямой  $AB$ . Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника  $ABC$ .
3. В остроугольном треугольнике  $ABC$  на высоте  $BK$  как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. К этой окружности в точках  $E$  и  $F$  проведены касательные, которые пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $BP$  содержит медиану треугольника  $ABC$ .
4. Две окружности пересекаются в точках  $M$  и  $K$ . Из каждой точки  $A$  дуги  $MK$  одной окружности проводятся лучи  $AM$  и  $AK$ , пересекающие вторую окружность в точках  $B$  и  $C$  соответственно. Докажите, что медианы всех треугольников  $ABC$ , проведенные из вершины  $A$ , проходят через одну и ту же точку.
5. Дан треугольник  $ABC$ . Касательная в точке  $C$  к его описанной окружности пересекает прямую  $AB$  в точке  $D$ . Касательные к описанной окружности треугольника  $ACD$  в точках  $A$  и  $C$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $DK$  делит отрезок  $BC$  пополам.
6. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине  $A$  треугольника  $ABC$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $D$  и  $E$ . Окружность с диаметром  $DE$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A$  и  $X$ . Докажите, что  $AX$  – симедиана треугольника  $ABC$ .
7. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$ . Прямая  $BD$  пересекает окружность  $\omega_1$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ . Окружность  $\omega_2$ , построенная на отрезке  $DE$  как на диаметре, пересекает окружность  $\omega_1$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что прямая, симметричная прямой  $BF$  относительно прямой  $BD$ , содержит медиану треугольника  $ABC$ .
8. Из точки  $A$  к окружности  $\omega$  проведена касательная  $AD$  и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$  ( $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ ). Докажите, что окружность, проходящая через точки  $C$  и  $D$  и касающаяся прямой  $BD$ , проходит через фиксированную точку (отличную от  $D$ ).
9. Неравнобедренный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$ . Касательная к этой окружности в точке  $C$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $D$ . Пусть  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Прямые  $AI$  и  $BI$  пересекают биссектрису угла  $CDB$  в точках  $Q$  и  $P$  соответственно. Пусть  $M$  – середина отрезка  $PQ$ . Докажите, что прямая  $MI$  проходит через середину дуги  $ACB$  окружности  $\omega$ .
10. Пусть  $ABC$  – остроугольный треугольник, в котором  $AC < BC$ ;  $M$  – середина стороны  $AB$ . В описанной окружности  $\omega$  треугольника  $ABC$  проведён диаметр  $CC'$ . Прямая  $CM$  пересекает прямые  $AC'$  и  $BC'$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Перпендикуляр к прямой  $AC'$ , проведённый через точку  $K$ , перпендикуляр к прямой  $BC'$ , проведённый через точку  $L$ , и прямая  $AB$  образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность  $\omega'$  этого треугольника касается окружности  $\omega$ .