

### Симедиана треугольника

На двух занятиях подряд мы рассмотрим задачи, связанные с симедианой треугольника.

#### 1. Определение и антипараллельность.

Рассмотрим треугольник  $ABC$ , его медиану  $AM$  и его биссектрису  $AL$  (см. рис. 1а). Пусть луч  $AS$  симметричен лучу  $AM$  относительно прямой  $AL$ , где  $S$  – точка пересечения этого луча с  $BC$ . Тогда отрезок  $AS$  называется **симедианой** треугольника  $ABC$ .

Проведем отрезок  $C'B'$ , параллельный стороне  $BC$ , с концами на сторонах  $AB$  и  $AC$  соответственно (см. рис. 1б). Объясните, почему медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  делит его пополам. [Гомотетия с центром  $A$ ]

Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы  $AL$ : образом луча  $AM$  является луч  $AS$ , а образом отрезка  $B'C'$  является отрезок  $B_1C_1$ , антипараллельный этой стороне (см. равенство углов, отмеченных двумя дугами). Точка  $Q$  пересечения  $B_1C_1$  и  $AS$  является образом точки  $P$  пересечения  $AM$  и  $B'C'$ . Так как  $P$  – середина  $B'C'$ , то  $Q$  – середина  $B_1C_1$ . Очевидно, что все рассуждения можно провести и в обратную сторону.

Таким образом, мы получили утверждение, равносильное определению симедианы: **отрезок  $AS$  ( $S \in BC$ ) является симедианой треугольника  $ABC$  тогда и только тогда, когда он, пересекая отрезок, антипараллельный  $BC$ , делит его пополам.**

**Следствие.** Медиана треугольника  $ABC$  – симедиана треугольника  $AB'C'$ .

#### 2. Основное свойство и признак симедианы.

Известно, что медиана делит противоположную сторону и площадь треугольника пополам. А в каком отношении делит эту сторону и площадь треугольника симедиана?

Пусть в треугольнике  $ABC$ :  $AB = c$ ;  $AC = b$ .

Тогда  **$AS$  – симедиана треугольника  $ABC$  ( $S \in BC$ )**

**тогда и только тогда, когда**  $\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $AS$  – симедиана треугольника  $ABC$ . Проведем перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $AC$ :  $MP$ ,  $MQ$ ,  $SK$  и  $SN$  (см. рис. 2). Тогда

$$\frac{BS}{CS} = \frac{S_{\triangle ABS}}{S_{\triangle ACS}} = \frac{c \cdot SK}{b \cdot SN} \quad (*)$$

Из доказанных равенств пар углов следует подобие двух пар прямоугольных треугольников:  $\triangle ASK \sim \triangle AMQ$  и  $\triangle ASN \sim \triangle AMP$ . Следовательно,  $\frac{SK}{MQ} = \frac{AS}{AM}$  и  $\frac{SN}{MP} = \frac{AS}{AM}$ .

Значит,  $\frac{SK}{SN} = \frac{MQ}{MP} = \frac{c}{b}$  (последнее равенство следует из того, что треугольники  $ABM$  и  $ACM$  равновелики). Подставив это в равенство (\*), получим требуемое соотношение.

2) Пусть выполняется указанное равенство, но  $AS$  – не симедиана. Тогда проведем симедиану  $AS'$ , для которой выполняется такое же равенство, и получим, что  $S' \equiv S$ .

Равенство (\*) показывает, что площадь делится симедианой в том же отношении.

Таким образом, и это утверждение эквивалентно определению симедианы.

Рис. 1а

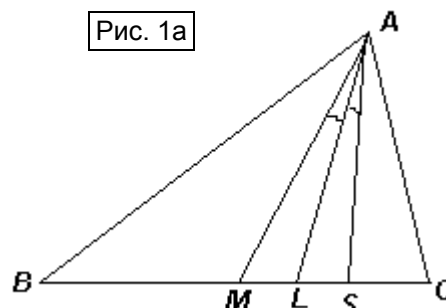


Рис. 1б

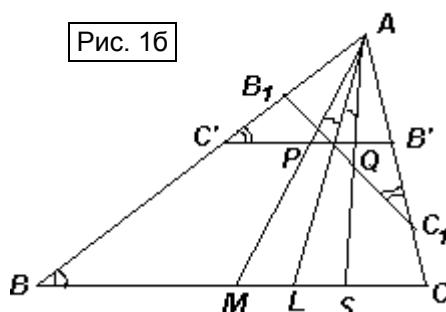
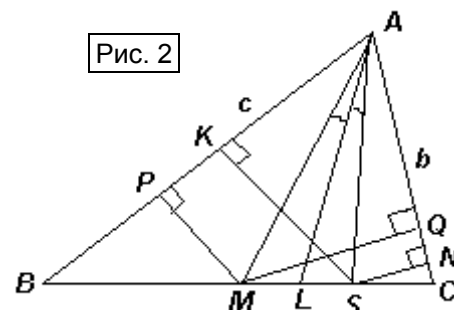


Рис. 2

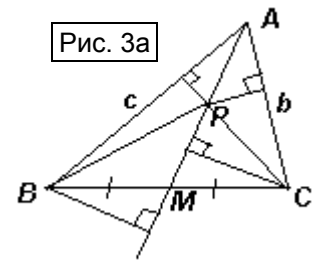


### 3. Симедиана как геометрическое место точек

Рассмотрим луч  $AM$ , содержащий медиану треугольника  $ABC$  (см. рис. 3а). Сформулируем несколькими способами его характеристику в качестве геометрического места точек.

**Луч  $AM$ , содержащий медиану треугольника  $ABC$ , является геометрическим местом точек  $P$ , принадлежащих углу  $A$  треугольника  $ABC$ , для которых:**

- 1) Расстояния от вершин  $B$  и  $C$  до прямой  $AP$  равны; 2)  $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ACP}$ ;
- 3) расстояния от точки  $P$  до прямых, содержащих стороны  $AB$  и  $AC$ , обратно пропорциональны этим сторонам.



Аналогичными свойствами обладает и симедиана.

**Симедиана – геометрическое место таких точек  $Q$ , принадлежащих углу  $A$  треугольника  $ABC$ , для которых:**

- 1) расстояния от вершин  $B$  и  $C$  до прямой  $AQ$  пропорциональны квадратам сторон  $c$  и  $b$ ; 2)  $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}} = \frac{c^2}{b^2}$ ;

расстояния от точки  $Q$  до прямых, содержащих стороны  $AB$  и  $AC$ , пропорциональны этим сторонам, то есть  $\frac{h_c}{h_b} = \frac{c}{b}$  (см.

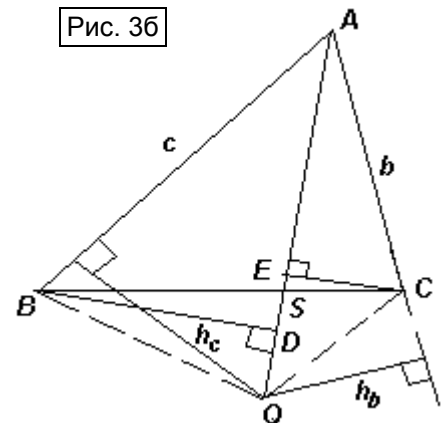
рис. 3б).

**Доказательство.** Используя, что  $\triangle SBD \sim \triangle SCE$  и

доказанное в пункте 2, получим: 1)  $\frac{BD}{CE} = \frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$ ; 2)  $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}} = \frac{BD}{CE} = \frac{c^2}{b^2}$ ; 3)  $\frac{ch_c}{bh_b} = \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow$

$$\frac{h_c}{h_b} = \frac{c}{b}.$$

Отметим, что в этом пункте мы обобщили понятие симедианы, считая ее лучом. Другие важные свойства симедианы будут рассмотрены на следующем занятии.



#### Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в неравностороннем треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.
2. В треугольнике  $ABC$  отрезки  $CP$  и  $BQ$  – симедианы. Можно ли утверждать, что треугольник  $ABC$  – равнобедренный, если: а)  $BP = CQ$ ; б)  $AP = AQ$ ; в)  $PQ \parallel BC$ ?
3. а) В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина стороны  $AC$ . Симедиана, проведенная из вершины  $B$ , пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке  $D$ . Докажите, что прямая  $AC$  содержит биссектрису угла  $BMD$ .  
б) Восстановите треугольник  $ABC$  по вершине  $B$ , центру и точке пересечения симедианы, проведенной из  $B$ , с описанной окружностью.
4. В треугольнике  $ABC$  с тупым углом  $B$  проведена средняя линия  $MK$ , параллельная  $BC$ . Через вершину  $A$  проведена касательная к окружности, описанной около этого треугольника, которая пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ . Докажите подобие треугольников  $ADK$  и  $CDM$ .
5. Высоты  $AA_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точка  $B_0$  – середина стороны  $AC$ . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных  $BB_0$  и  $HB_0$  относительно биссектрис углов  $ABC$  и  $AHC$  соответственно, лежит на прямой  $A_1C_1$ .
6. Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $a$ , параллельная  $BC$ . Симедиана треугольника, проведенная из вершины  $B$ , вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке  $D$ . Прямая  $CD$  пересекает прямую  $a$  в точке  $X$ . Докажите, что: а) равны углы  $ABC$  и  $AMX$ , где  $M$  – середина  $AC$ ; б) прямая  $AB$  является

касательной к окружности, описанной около четырехугольника  $AMDX$ .

**7.** В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  высоты  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $H$ , а медианы треугольника  $AH'B'$  пересекаются в точке  $M$ . Прямая  $CM$  делит отрезок  $A'B'$  пополам. Найдите угол  $C$ .

**8.** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CD$ . Серединный перпендикуляр к стороне  $AC$  пересекает ее в точке  $M$ , а серединный перпендикуляр к стороне  $BC$  – в точке  $N$ . Лучи  $AM$  и  $BN$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $CP$  – симедиана треугольника  $ABC$ .

**9.** Точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  – середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно, а  $BH$  – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников  $AHC'$  и  $CHA'$  окружности проходят через точку  $M$ , отличную от  $H$ , то  $\angle ABM = \angle CBV'$ .

**10.** Дан неравносторонний остроугольный треугольник  $ABC$ ,  $BB_1$  – его симедиана, луч  $BB_1$  вторично пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника, в точке  $L$ . Пусть  $H_A$ ,  $H_B$  и  $H_C$  – основания высот треугольника  $ABC$ , а луч  $BH_B$  вторично пересекает  $\omega$  в точке  $T$ . Докажите, что точки  $H_A$ ,  $H_C$ ,  $T$  и  $L$  лежат на одной окружности.