

### Примеры и контрпримеры в стереометрии

Нам предстоит серия занятий по стереометрии. Для того, чтобы они были эффективны, имеет смысл начать с конструктивных задач. Среди задач, предлагаемых сегодня, много простых, но есть и сравнительно трудные. При этом, задач много и есть возможность выбирать.

#### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Верно ли, что в пространстве: а) два угла с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо составляют в сумме  $180^\circ$ ; б) угол между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$  равен углу между прямой  $b$  и плоскостью  $\beta$ , если  $a \perp b$  и  $\alpha \perp \beta$ ?
2. Внутри куска сыра, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, есть одна дырка шарообразной формы. Требуется провести плоский разрез параллельно одному из ребер так, чтобы сыр разрезался на два куска одинакового объема. Как это сделать? (*Предполагается, что местонахождение дырки нам известно.*)
3. Существует ли такая неплоская замкнутая ломаная, в которой не меньше, чем шесть звеньев, и: а) длины всех ее звеньев равны и углы между соседними звеньями равны; б) каждое свое звено она пересекает ровно один раз, причем в его середине?
4. Можно ли разрезать куб: а) на пять треугольных пирамид; б) на три равные части, не являющиеся ни параллелепипедами, ни пирамидами?
5. Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?
6. Прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Известно, что в этой плоскости найдутся 2020 прямых, равноудаленных от  $a$ . Верно ли, что  $a$  перпендикулярна  $\alpha$ ?
7. Известно, что  $PC$  – перпендикуляр к плоскости  $ABC$ . Обязательно ли угол  $ACB$  не меньше, чем угол  $APB$ ?
8. Существует ли а) тело; б) треугольник; проекциями которого на каждую из двух перпендикулярных плоскостей являются не равные между собой правильные треугольники?
9. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.  
а) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?  
б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой – равносторонним треугольником со стороной 2?
10. В выпуклой  $n$ -угольной призме равны все боковые грани. При каких  $n$  эта призма обязательно является прямой?