Полярное соответствие

Пусть на плоскости зафиксирована окружность ω с центром *O* радиуса *R*. Напомню, что ***точки A и A' (отличные от O) называются симметричными относительно ω, если A' лежит на луче OA и OA·OA' = R²*** (см. рис. 1). Эти точки являются ***инверсными***.

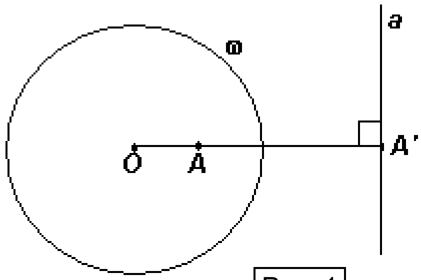

Рис. 1

Введем новое понятие.

Определения. 1) Для каждой точки *A* плоскости, отличной от *O*, через точку *A*', симметричную ей относительно ω, проведем прямую *a*, перпендикулярную *OA*'. Тогда прямая *a* называется ***полярой*** точки *A*, а точка *A* – ***полюсом*** прямой *a* (см. рис. 1 – *дополнить*).

2) Соответствие $\{A\} \leftrightarrow \{a\}$ является взаимно-однозначным соответствием между точками, не совпадающими с *O*, и прямыми, не проходящими через *O*, и оно называется ***полярным соответствием***.

Условимся обозначать точки, не совпадающие с *O* (полюсы), большими латинскими буквами, а прямые, не проходящие через *O* (поляры), соответствующими маленькими буквами. Само полярное соответствие будем обозначать знаком «$\leftrightarrow$».

Если считать, что точке O соответствует бесконечно удаленная прямая, а прямым, проходящим через O, соответствуют бесконечно удаленные точки, то можно рассматривать полярное соответствие на ***проективной плоскости****.*

Это обычная плоскость, дополненная бесконечно удаленными точками, которые можно считать точками пересечения параллельных прямых. Все бесконечно удаленные точки лежат не бесконечно удаленной прямой.

Из определения понятно, что для доказательства ***простейших свойств полярного соответствия*** нам потребуется вспомнить некоторые свойства ***инверсии***.

1) Построение образа точки *A*, лежащей вне окружности инверсии.

2) Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

Простейшие свойства полярного соответствия

1. а) Пусть точка *A* расположена вне окружности ω. Проведем из *A* касательные *AM* и *AN*. Тогда *MN* – поляра точки *A*.

Следует из основного способа построения точки A' для этого случая.

б) Если $A \in \omega$, то *a* – касательная к ω, проведенная в точке *A*.

Следует из того, что A' ≡ A.

в) Один из углов между полярами точек *A* и *B* равен углу *AOB*.

Угол между прямыми, соответственно перпендикулярными двум данным.

г) Поляра *a* точки *A* относительно ω является радикальной осью двух окружностей: ω и окружности α с диаметром *OA*.

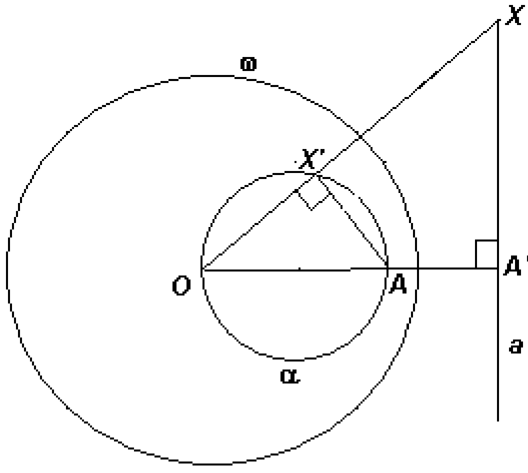

Рис. 2

Следует из 1 а, б и свойства 2) инверсии: геометрическое место образов точек прямой a при инверсии относительно ω есть окружность с диаметром OA (см. рис. 2).

д) Полярой точки *A* относительно окружности (*O*; *R*) является множество таких точек *X*, что $\overline{OA} \cdot \overline{OX} = R^2$.

Следует из 1г и свойства 2 инверсии (см. рис. 2). Кроме того, $\overline{OA} \cdot \overline{OX} = OA \cdot OX \cdot \cos\angle XOA$ *= OA·OA' = R^2.*

Этот факт иногда используется в качестве определения поляры.

2. (*Двойственность*) а) $A \in b \Leftrightarrow B \in a$.

Следует из 1д.

б) Пусть *O*, *A* и *B* не лежат на одной прямой, тогда *C* = $a \cap b \leftrightarrow AB$.

Следует из 2а (поляра точки C проходит через точки A и B, поэтому совпадает с AB).

в) Точки *A*, *B* и *C* лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда *a*, *b* и *c* проходят через одну точку или параллельны.

1) Параллельность $\Leftrightarrow$ O лежит на той же прямой. 2) (Следует из 2а) $a \cap b \leftrightarrow AB$, $a \cap c \leftrightarrow AC$. Тогда AB $\equiv$ AC $\Leftrightarrow$ $a \cap b \equiv a \cap c$.

На занятии «Симедиана_2» мы встретились с понятием ***гармонического четырехугольника***. Напомню, что вписанный четырехугольник *ABCD* называется гармоническим, если *AB·CD* = *BC·AD*. Это понятие можно обобщить для любого расположения точек *A*, *B*, *C* и *D*. В частности, если они лежат на одной прямой, то их называют ***гармонической четверкой точек***. Один из примеров такой четверки – две вершины треугольника и основания внутренней и внешней биссектрис, проведенных к стороне с концами в этих вершинах (*изобразить*).

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Даны окружность α и прямая *l*, не имеющие общих точек. Из каждой точки *P*, лежащей на прямой *l*, проводятся касательные *PA* и *PB* к окружности α. Докажите, что все хорды *AB* имеют общую точку.

2. (***Гармоническая четверка***) а) Точки *A*, *B*, *C* и *D* лежат на одной прямой и образуют гармоническую четверку (*AB·CD* = *BC·AD*). Докажите, что точка *D* лежит на поляре точки *B* относительно любой окружности, проходящей через *A* и *C*.

3. (***Основное свойство полярного соответствия***) Через точку *A*, лежащую вне окружности α, проведены к ней две секущие *m* и *l*, которые пересекают α в точках M_1, M_2 и L_1, L_2 соответственно. Докажите, что прямые M_1L_1 и M_2L_2 пересекаются на поляре точки *A* или параллельны ей.

4. Диагонали вписанного четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *T*, а продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках *P* и *Q*. Докажите, что:

а) точки *P* и *Q* лежат на поляре точки *T*.

б) четверка точек *P*, *Q*, *T* и *O* (центр окружности) – ортоцентрическая (*любая из этих точек является ортоцентром треугольника с вершинами в трех других точках*).

5. Объясните, каким образом, используя только линейку без делений, построить:

а) поляру точки, не лежащей на данной окружности α;

б) касательную к данной окружности α, проходящую через заданную точку *M*,

в) перпендикуляр из данной точки *P*, лежащей на полуокружности с данным диаметром *AB*, к этому диаметру.

6. а) (***Симметричная бабочка***) Дана точка *A* на диаметре *BC* полуокружности α. Точки *X* и *Y*, лежащие на α, таковы, что $\angle XAB = \angle YAC$. Докажите, что все прямые *XY* проходят через одну и ту же точку, либо параллельны.

б) Объясните, каким образом из утверждения задачи 6а можно получить решение ***основной задачи о симедиане***: «Касательные к описанной окружности треугольника *ABC*, проведенные через точки *B* и *C*, пересекаются в точке *P*. Тогда *AP* – симедиана треугольника *ABC*».

7. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность α. Известно, что касательные к α, проведенные в точках *A* и *C*, пересекаются на прямой *BD* или параллельны *BD*. Докажите, что: а) касательные к α, проведенные в точках *B* и *D*, пересекаются на прямой *AC* или параллельны *AC*.

б) условие пункта а) равносильно тому, что *ABCD* – гармонический четырехугольник·

8. Четырехугольник *ABCD* описан около окружности α. *K*, *L*, *M* и *N* – точки касания α со сторонами *AB*, *BC*. *CD* и *DA* соответственно. Продолжения сторон *AB* и *CD* пересекаются в точке *R*, продолжения сторон *BC* и *DA* – в точке Q, продолжения *KL* и *MN* – в точке *S*, продолжения *LM* и *NK* – в точке *T*. Докажите, что: а) точки *Q*, *R*, *S* и *T* лежат на одной прямой; б) прямые *AC*, *BD*, *KM* и *LN* пересекаются в одной точке.

9. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность α с центром *O*. Его диагонали пересекаются в точке *T*, а лучи *AB* и *DC* – в точке *P*. Описанные окружности треугольников *PAD* и *PBC* вторично пересекаются в точке *M*. Докажите, что точки *O*, *T* и *M* лежат на одной прямой.

10. Пусть *AL* и *AK* – внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника *ABC*, *P* – точка пересечения касательных к описанной окружности в точках *B* и *C*. Перпендикуляр, восставленный из точки *L* к *BC*, пересекает прямую *AP* в точке *Q*. Докажите, что *Q* лежит на средней линии треугольника *LKP*.