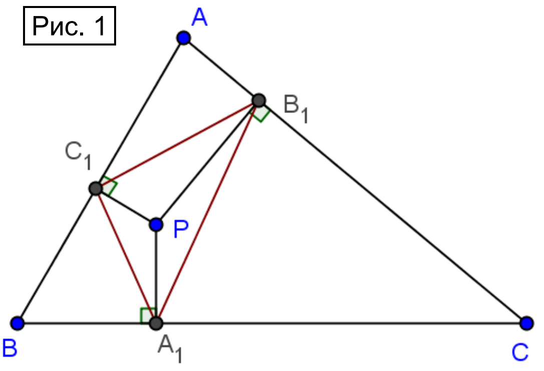
Педальные треугольники. Изогональное сопряжение

В течение двух занятий мы обсудим вопросы, связанные с изогональным сопряжением на плоскости, и соотнесем их с уже известными вам фактами геометрии.

Определение 1. Пусть на плоскости даны треугольник *ABC* и некоторая точка *P*. Треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из *P* на прямые, содержащие стороны треугольника, называется ***педальным треугольником P относительно ABC*** (см. рис. 1).



С какими из педальных треугольников вы хорошо знакомы? [Со срединным треугольником, ортотреугольником, треугольником, образованным точками касания вписанной окружности со сторонами]

Для каких точек плоскости педального треугольника относительно *ABC* не существует? [Для точек описанной окружности треугольника *ABC* (прямая Симсона)]

Определение 2. Пусть дан угол *BAC*. Прямые, проходящие через точку *A* и симметричные относительно его биссектрисы, называются ***изогоналями***.

Приведите примеры известных вам изогоналей. [Медиана и симедиана; высота треугольника и радиус его описанной окружности, проведенные из одной вершины]

Рассмотрим ***характеристическое свойство изогоналей***.

Теорема. Пусть B_1 и C_1 – проекции точки *P* на стороны угла *A*. Тогда *AP* и *AQ* являются изогоналями тогда и только тогда, когда $AQ \perp B_1C_1$.

Доказательство. Пусть *P* лежит внутри угла *A* (*остальные случаи аналогичны*). Рассмотрим точки *K* и *M*, симметричные точке *P* относительно сторон угла (см. рис. 2а). Тогда $KM \parallel B_1C_1$, поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $AQ \perp KM$.

Пусть $\angle B_1AC_1 = \alpha$, $\angle PAC_1 = \angle MAC_1 = \varphi$. Тогда $\angle PAB_1 = \angle KAB_1 = \alpha - \varphi$, $\angle KAM = 2\alpha$. Так как $AM = AP = AK$, то биссектриса угла *KAM* перпендикулярна *KM*. Она содержит точку *Q* тогда и только тогда, когда $\angle QAB_1 = \angle QAK - \angle B_1AK = \alpha - (\alpha - \varphi) = \varphi = \angle PAC_1$, то есть когда *AQ* симметрична *AP* относительно биссектрисы угла *A*.

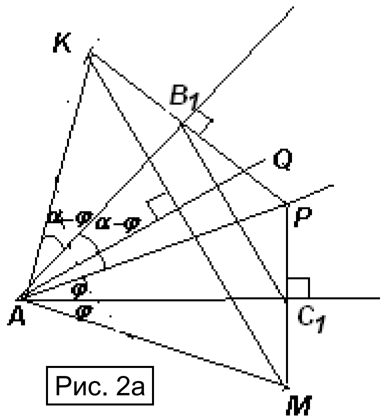


Рис. 2а

Из этой теоремы следует важное утверждение.

Пусть дан треугольник ABC и некоторая точка P. Тогда изогонали прямых AP, BP и CP относительно соответствующих углов треугольника пересекаются в одной точке.

Для доказательства дополним рис. 2а до треугольника (см. рис. 2б). По доказанному, *AQ* изогональна *AP* тогда и только тогда, когда *AQ* – серединный перпендикуляр к отрезку *KM*.

Проведя аналогичные рассуждения для изогоналей *BP* и *CP*, получим, что изогонали являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника *KLM*, которые пересекаются в точке *Q* – центре окружности, описанной около этого треугольника.

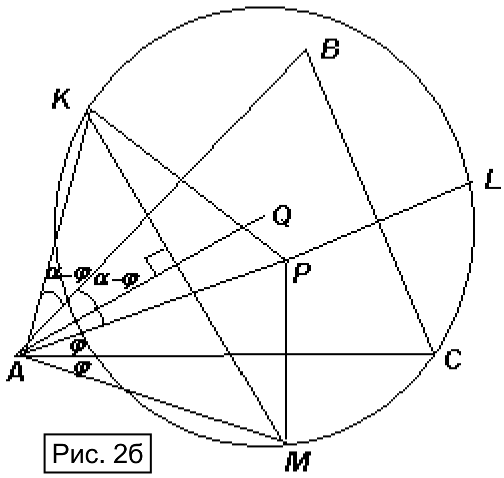
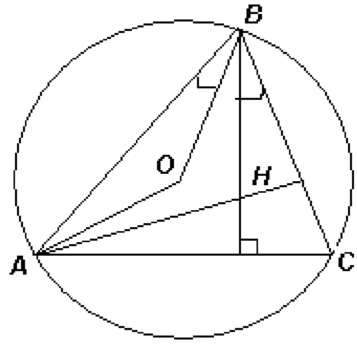


Рис. 2б

Точки P и Q, полученные таким образом, называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC. Рис. 2в



Следствие. Стороны педального треугольника точки P соответственно перпендикулярны прямым AQ, BQ и CQ тогда и только тогда, когда Q и P изогонально сопряжены.

Один из примеров изогонально сопряженных точек вам хорошо известен. Какой? [Ортоцентр H треугольника и центр O его описанной окружности (см. рис. 2в]

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Пусть $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC.

а) Докажите, что: $B_1C_1 = \dfrac{BC \cdot AP}{2R}$, где R – радиус окружности, описанной около ABC.

б) Прямая m_a проходит через середины отрезков B_1C_1 и PA, прямые m_b и m_c определяются аналогично. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

2. Пусть $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC. Прямые AP, BP и CP пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

3. Внутри угла BAC даны точки P и Q. Докажите, что AP и AQ – изогонали тогда и только тогда, когда: а) их расстояния до сторон угла обратно пропорциональны; б) их проекции на стороны угла лежат на одной окружности.

4. а) Докажите, что точки изогонально сопряжены относительно треугольника тогда и только тогда, когда совпадают описанные окружности их педальных треугольников.

б) Где расположен центр этой окружности?

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Точка D симметрична вершине А относительно середины отрезка BC. а) Докажите, что P и D – изогонально сопряженные точки относительно треугольника ABC. б) Какой факт, доказанный ранее, из этого следует?

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки A_1, B_1 и C_1 – проекции точки D на стороны треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

7. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и B пересекаются в точке P. Окружность, проходящая через проекции P на прямые BC, CA и AB, повторно пересекает прямую AB в точке C'. Аналогично определяются точки A' и B'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

8. В треугольнике ABC каждый угол меньше, чем 120°. Докажите, что в этом треугольнике: а) точка T Торричелли изогонально сопряжена точке P Аполлония (*точке пересечения окружностей Аполлония, лежащей внутри треугольника*). б) лучи AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в вершинах равностороннего треугольника.

9. Пусть $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC, H_1, H_2 и H_3 – ортоцентры треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Точка Q – ортоцентр треугольника $H_1H_2H_3$. Докажите, что: а) P и Q – изогонально сопряженные точки относительно треугольника ABC; б) треугольники .$H_1H_2H_3$ и $A_1B_1C_1$ равны; в) прямые A_1H_1, B_1H_2 и C_1H_3 пересекаются в одной точке.

10. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность. Докажите, что четырехугольник, образованный проекциями любой точки этой окружности на прямые AC, BC, AD и BD, является вписанным.