30.03.21

Теорема Паскаля

На занятиях по темам «Выход в пространство» и «Полярное соответствие» мы уже говорили об элементах проективной геометрии. Одну из теорем, находящуюся на стыке евклидовой и проективной геометрии, а именно, теорему Дезарга мы уже рассматривали. Сегодня – еще одна такая теорема, которая называется ***теоремой Паскаля***.

***Теорема*. *Три точки попарного пересечения противолежащих сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой*.**

Доказательство. <u>Первый способ</u>. Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность, *M* = (*AB*) ⋂ (*DE*), *P* = (*BC*) ⋂ (*EF*), *N* = (*CD*) ⋂ (*FA*) (см. рис. 1а). Докажем, что точки *M*, *P* и *N* лежат на одной прямой.

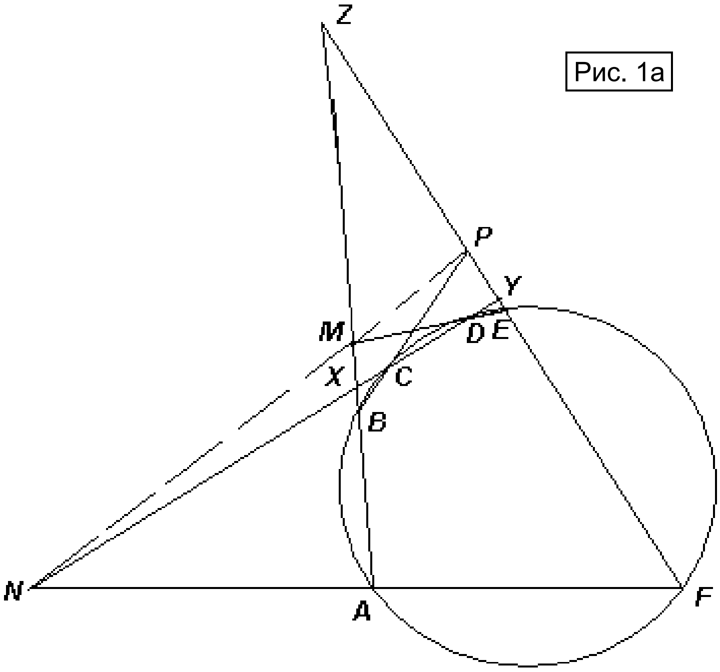


Рис. 1а

Рассмотрим точки попарного пересечения сторон, взятых через одну: *X* = (*AB*) ⋂ (*CD*), *Y* = (*CD*) ⋂ (*EF*), *Z* = (*EF*) ⋂ (*AB*). По теореме о степени точки получим три равенства, которые удобно записать в векторной форме: $\overline{XA}\cdot\overline{XB}=\overline{XC}\cdot\overline{XD}$; $\overline{YC}\cdot\overline{YD}=\overline{YE}\cdot\overline{YF}$ и $\overline{ZA}\cdot\overline{ZB}=\overline{ZE}\cdot\overline{ZF}$ (1).

Рассмотрим треугольник *XYZ* и три прямые, пересекающие его стороны: (*BC*), (*DE*) и (*FA*). Применяя в каждом случае теорему Менелая, соответственно получим: $\frac{\overline{XB}}{\overline{BZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{CX}}=-1$; $\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZE}}{\overline{EY}}\cdot\frac{\overline{YD}}{\overline{DX}}=-1$ и $\frac{\overline{XA}}{\overline{AZ}}\cdot\frac{\overline{ZF}}{\overline{FY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1$. Перемножим почленно эти равенства и произведем сокращения, учитывая равенства (1): $\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1$. Следовательно, точки *M*, *P* и *N* лежат на одной прямой (***коллинеарны***).

Эта прямая называется прямой Паскаля для данного вписанного шестиугольника.

Так как теорема Паскаля по своей сути является проективной, то можно сразу предсказать, что произойдет, если в данном шестиугольнике: а) две стороны параллельны; б) две пары сторон параллельны.

Пусть, например, (*AB*) || (*DE*), то есть *M* – бесконечно удаленная точка, тогда (*NP*), проходящая через *M*, будет параллельна этим сторонам. *Самостоятельно сделать чертеж*.

Если же (*AB*) || (*DE*) и (*BC*) || (*EF*), то *M* и *P* – бесконечно удаленные точки, поэтому, (*MP*) – бесконечно удаленная прямая, а точка *N* ей принадлежит. Это означает, что (*CD*) || (*FA*).

Отметим, что утверждение теоремы Паскаля останется верным, если точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* расположены на окружности произвольным образом, то есть если *ABCDEFA* – произвольная замкнутая ломаная (возможно с самопересечениями). Это дает возможность рассмотреть другой способ доказательства теоремы Паскаля.

<u>Второй способ</u>. Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность, *X* = (*AB*) ⋂ (*DE*), *Y* = (*BC*) ⋂ (*EF*), *Z* = (*CD*) ⋂ (*FA*) (см. рис..1б) Докажем, что точки *X*, *Z* и *Y* лежат на одной прямой.

Треугольники AZD и CZF подобны. Кроме того, $\angle XAZ = \angle YCF$ и $\angle XDZ = \angle YFC$. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник AZD в треугольник CZF. Образом точки X будет такая точка X', что $\angle X'CZ = \angle XAZ = \angle YCF$ и $\angle X'FZ = \angle XDZ = \angle YFC$. Следовательно, точка X' изогонально сопряжена точке Y относительно треугольника CZF. Тогда $\angle FZY = \angle CZX' = \angle AZX$, то есть точки X, Z и Y лежат на одной прямой.

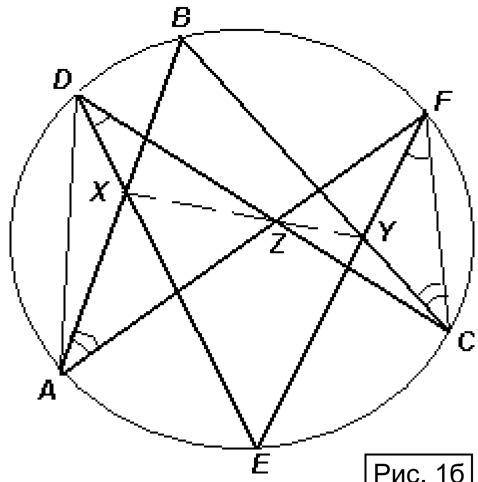


Рис. 1б

Более того, теорема Паскаля в этом общем случае верна не только для точек, лежащих на окружности, но и для шести точек, принадлежащих любому коническому сечению!

Отметим также, что если на таком чертеже обозначить точки так, чтобы вписанный шестиугольник $ABCDEF$ был выпуклым, то получим следствие: три точки попарного пересечения его диагоналей лежат на одной прямой (см. рис. 1в).

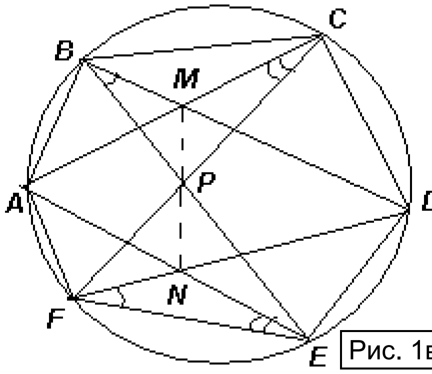


Рис. 1в

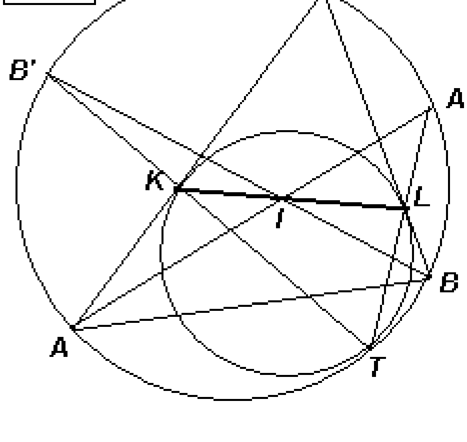
Отметим также, что справедлива и теорема, обратная теореме Паскаля, которая уже целиком относится к проективной геометрии: ***если три пары противолежащих сторон шестиугольника пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то вершины шестиугольника принадлежат некоторому коническому сечению***.

В качестве примера применения теоремы Паскаля рассмотрим ее неожиданную связь с ***леммой о сегменте*** и одним из свойств ***полувписанной окружности***.

Пример. Полувписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и BC в точках K и L, а описанной окружности – в точке T. Докажите, что центр вписанной окружности I – середина отрезка KL.

Этот факт был доказан ранее, но с помощью теоремы Паскаля доказательство станет гораздо проще.

Рис. 2



Решение. См. рис. 2. По лемме о сегменте, прямые TL и TK вторично пересекают окружность в точках A' и B' – серединах дуг BC и AC. Значит, AA' и BB' – биссектрисы треугольника, поэтому они пересекаются в точке I. По теореме Паскаля для ломаной $CAA'TB'B$ получим, что точки K, I и L лежат на одной прямой. Так как треугольник KCL – равнобедренный, то его биссектриса CI является также и медианой, что и требовалось.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Не используя проективной формулировки теоремы Паскаля, докажите, что если две пары противолежащих сторон вписанного шестиугольника параллельны, то и третья пара сторон также параллельна.

2. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте еще одну точку этой окружности.

3. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$.

а) Через произвольную точку X проведены прямые AX и DX, пересекающие прямые CD и AB в точках E и F соответственно и вторично пересекающие окружность в точках M и N

соответственно. Докажите, что прямые EF, MN и BC пересекаются в одной точке или параллельны.

б) Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90°$. Докажите, что точка P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой XO.

4. Пусть O и I – центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, R и r – радиусы этих окружностей, J – точка, симметричная вершине прямого угла относительно I. Найдите OJ.

5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Полувписанные окружности треугольников ACD и BCD, касающиеся сторон AD и BD соответственно, касаются стороны CD в одной и той же точке X. Докажите, что центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на перпендикуляре, опущенном из точки X на AB.

6. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

7. Даны треугольник ABC и некоторая точка T. Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S – основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка X пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

8. Точки A и A_1, лежащие внутри окружности с центром O, симметричны относительно точки O. Точки P, P_1, Q и Q_1 лежат на окружности, причем сонаправлены лучи AP и A_1P_1 и лучи AQ и A_1Q_1. Докажите, что точка пересечения прямых P_1Q и PQ_1 лежит на прямой AA_1.

9. Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, P – произвольная точка. Прямые AP, BP и CP пересекают окружность в точках A', B' и C' соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых MA' и BC, MB' и CA, MC' и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку P.

10. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2; а его вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3 соответственно. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.