29.09.20

Окружность Аполлония

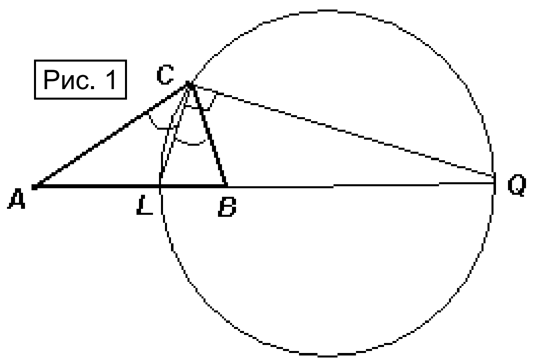
Это занятие мы начнем со старинной задачи.

Задача. Флибустьеры с острова Ямайка узнали, что на якоре перед Пуэрто-Бельо стоит испанский галеон, груженный золотом. Как только закончится шторм, галеон выйдет в Карибское море и возьмет курс на пролив между островам Гаити и Пуэрто-Рико. Флибустьеры также ждут конца шторма, поэтому выйти из Кингстона они могут только одновременно с испанцами. Какой курс следует выбрать флибустьерам, чтобы наверняка перехватить испанцев?

Решение. Если флибустьеры точно знают, во сколько раз скорость их корабля больше скорости галеона, то они могут найти все точки, в которые их корабль и галеон могут попасть одновременно. Действительно, пусть отношение скоростей равно $k > 1$, тогда и отношение расстояний, пройденных кораблями до встречи, также равно k. Следовательно, все возможные точки встречи лежат на ГМТ M таких, что $\frac{BM}{AM} = k$, где точки A и B соответствуют Пуэрто-Бельо и Кингстону.

Таким ГМТ является окружность, которую называют ***окружностью Аполлония***. Доказать этот факт сравнительно несложно. Для этого есть много способов и каждый из них имеет свои преимущества.

1) «Классический», который использует свойства внутренней и внешней биссектрисы треугольника и утверждения, им обратные (см. рис. 1).



Этот способ хорош еще и тем, что позволяет сразу понять как построить окружность Аполлония для двух данных точек A и B при заданном числе k. Кроме того, этот способ позволяет ввести понятие ***окружности Аполлония треугольника*** для любой пары его вершин: это ***окружность, диаметром которой является отрезок, соединяющий основания внутренней и внешней биссектрис, проведенных из третьей вершины*** (см. рис. 1).

2) «Координатный», где отношение квадратов расстояний до двух точек записывается в явном виде.

Преимущество этого способа – получение координат центра и уравнения окружности Аполлония в явном виде.

3) С помощью инверсии. Его преимущество – возможность обобщения некоторых фактов, связанных с окружностью Аполлония. К этому способу мы еще вернемся, когда займемся инверсией.

Понятно, что при $k = 1$ искомым ГМТ является не окружность, а прямая – серединный перпендикуляр к отрезку AB, которую можно трактовать как окружность бесконечного радиуса.

Возвращаясь к пиратом, понятно, что начертив на карте соответствующую окружность Аполлония, флибустьеры найдут, что курс галеона пересекает ее в двух точках. Поэтому, взяв курс на любую из них, они наверняка встретятся с испанцами, если, конечно, тех не перехватят другие пираты. Исходя из последнего, флибустьерам имеет смысл предпочесть ту из двух точек, которая ближе к Пуэрто-Бельо.

Задачи, которые будут вам предложены, помогут разобраться в свойствах окружности Аполлония и увидеть различные случаи ее применения, но некоторые из них могут быть решены и другими способами.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. На прямой даны точки A, B, C и D (в указанном порядке). Объясните, как построить точку M, из которой отрезки AB, BC и CD видны под равными углами.

2. Пусть S – окружность Аполлония для точек A и B, причем точка A лежит вне окружности S. Из точки A проведены касательные AP и AQ к окружности S. Докажите, что B – середина отрезка PQ.

3. Через вершину A треугольника ABC проведены касательная к его описанной окружности, которая пересекла прямую BC в точке K. а) Докажите, что K является центром окружности Аполлония точек B и C. б) Найдите радиус этой окружности, если даны стороны треугольника: a, b и c.

4. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

5. Постройте ромб $ABCD$ с данной длиной высоты, если заданы его вершина A и точка E – середина стороны BC.

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр O описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. а) Докажите, что $\angle OCB = \angle OBC_1$. б) Найдите угол ACB.

7. В треугольнике ABC проведены три окружности Аполлония (для каждой пары вершин). Докажите, что: а) они имеют ровно две общие точки, одна из которых лежит вне треугольника (они называются ***точками Аполлония*** этого треугольника); б) проекции каждой точки Аполлония на стороны треугольника образуют правильный треугольник; в)* прямая, соединяющая точки Аполлония, проходит через центр описанной окружности треугольника.

8. Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M и H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

9. В треугольнике ABC отметили центр I вписанной окружности, основание H высоты, опущенной на сторону AB, и центр I_c вневписанной окружности, касающейся этой стороны. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его.

10. Восстановите треугольник ABC по его ортоцентру H, и основаниям D и L медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A.