17.01.21

Изогональное сопряжение. Точка Лемуана

На этом занятии мы продолжим заниматься изогональным сопряжением. Мы рассмотрим другой подход к этому понятию и уточним связь между изогональным сопряжением и симедианами.

1. Вспомним ***теорему Чевы***: три чевианы *AA*', *BB*' и *CC*' треугольника *ABC* пересекаются в одной точке т. и т. т., когда $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}$ = 1 (см. рис. 1).

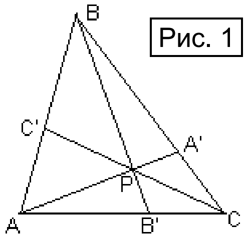

Рис. 1

2. Докажем следствие из нее, которое обычно называют ***теоремой Чевы в форме синусов***: три чевианы *AA*', *BB*' и *CC*' треугольника *ABC* пересекаются в одной точке т. и т. т., когда $\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}=1$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любых точек *A*', *B*' и *C*', лежащих на сторонах *BC*, *CA* и *AB* треугольника *ABC*, выполняется равенство: $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}$ = $\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}$.

Действительно, пусть $\angle AB'B=\varphi$, тогда $\angle CB'B = 180° - \varphi$ (*дополнить рис. 1*). По теореме синусов из треугольников *ABB*' и *CBB*' получим: $\frac{AB'}{\sin\angle ABB'}=\frac{AB}{\sin\varphi}$ и $\frac{B'C}{\sin\angle B'BC}=\frac{BC}{\sin\left(180^{*}-\varphi\right)}$. Следовательно, $\frac{AB'}{B'C}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}$. Запишем еще два аналогичных соотношения для $\frac{CA'}{A'B}$ и $\frac{BC'}{C'A}$ (*самостоятельно*). Перемножив полученные равенства почленно, получим требуемое.

3. Докажем, что ***если чевианы AA', BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в одной точке, то чевианы AA_1, BB_1 и CC_1, симметричные им относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, также пересекаются в одной точке***.

Запишем условие, используя теорему Чевы в форме синусов: $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}$ = $\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}$ = 1. Используя равенство углов, которое следует из симметрии (см. рис. 2), получим: $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}$ = $\frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle B_1BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle A_1AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle C_1CA}$ = $\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}\cdot\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}$ = $1:\left(\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}\right)$ = 1. Тогда требуемое утверждение следует из теоремы Чевы.

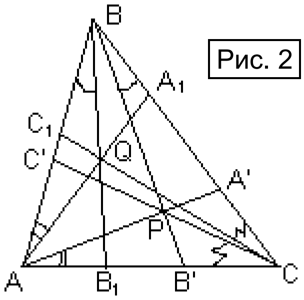

Рис. 2

Это еще один способ ввести понятие ***изогонально сопряженных точек относительно треугольника ABC***.

4. Пусть *AA*', *BB*' и *CC*' – медианы треугольника *ABC*, тогда AA_1, BB_1 и CC_1 – симедианы. Из доказанного утверждения пункта 3 следует, что ***симедианы треугольника также пересекаются в одной точке*** (см. рис. 2). ***Точка Q пересечения симедиан называется точкой Лемуана***.

Тем самым установлена связь между изогональным сопряжением и симедианами.

5. Пусть задан треугольник *ABC*. Тогда ***отображение всех точек плоскости, кроме его вершин, при котором каждой точке соответствует ей изогонально сопряженная, называется изогональным сопряжением плоскости относительно треугольника ABC***.

Некоторые свойства этого отображения – в процессе решения задач.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Докажите свойства изогонального сопряжения относительно данного треугольника: а) оно имеет четыре неподвижные точки; б) образом любой точки прямой, содержащей сторону треугольника, кроме его вершин, является противолежащая вершина; в) у точек, лежащих на описанной окружности треугольника, нет изогонально сопряженных.

2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике точка Лемуана совпадает с серединой высоты, проведенной к гипотенузе.

3. Через точку X, лежащую внутри треугольника, проведены три отрезка, антипараллельных сторонам треугольника. Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда X – точка Лемуана этого треугольника.

4. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Прямые, проходящие через A, B и C и соответственно параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

5. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD, чем A). Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB – симедиана треугольника KPL.

6. Пусть A_1, B_1 и C_1 – проекции точки Лемуана L треугольника ABC на его стороны. Докажите, что L – точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

7. Прямые AL, BL и CL, где L – точка Лемуана треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что L – точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.

8. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана этого треугольника.

9. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C' и B' соответственно так, что $BB' \perp CC'$. Точка X внутри треугольника такова, что $\angle XBC = \angle B'BA$, $\angle XCB = \angle C'CA$. Докажите, что $\angle B'XC' = 90° - \angle A$.