Дискретная геометрия

Полянский Александр Андреевич

Сборы Москвы, осень 2020
6 ноября

1. На плоскости отмечено нечётное число единичных кругов. Докажите, что найдётся центр одного из кругов, покрытый нечётное число раз кругами.

2. Пусть на плоскости нарисовано несколько выпуклых многоугольников, которые нельзя разделить прямой, то есть не существует прямой, не пересекающей ни один из многоугольников и разделяющей множество многоугольников на два непустых множества. Докажите, что у выпуклой оболочки этого набора многоугольников диаметр[1] не больше суммы диаметров многоугольников.

3. На плоскости дано n точек в общем положении[2], некоторые из которых соединены отрезками. Оказалось, что любые два отрезка имеют общую точку (вершина может являться общей точкой). Для всех конфигураций точек и всех таких наборов отрезков какое наибольшее число отрезков могло быть проведено?

4. На плоскости дано n точек в общем положении, некоторые из которых соединены отрезками. Оказалось, что для любого отрезка найдётся не более одного другого отрезка такого, что у отрезков нет общих точек (вершина может являться общей точкой). Для всех конфигураций точек и всех таких наборов отрезков какое наибольшее число отрезок могло быть проведено?

5. На плоскости отмечено $k(k+1)/2+1$ точек, некоторые из которых соединили непересекающимися по внутренним точкам отрезками (в том числе ни одна из точек не лежит на отрезке, соединяющим другие точки). Оказалось, что плоскость разбилась на параллелограммы и бесконечную область. Среди всех конфигураций точек и всех наборов отрезков какое наибольшее число отрезков могло быть проведено?

6. Пусть множества A_1 и A_2 — два множества n точек на плоскости в общем положении. Обозначим через $T(A_i)$ число ломаных без самопересечений, состоящих из $n-1$ звеньев, с вершинами в точках A_i, то есть мы рассматриваем ломаные проходящие через все точки A_i. Пусть точки A_1 являются вершинами выпуклого многоугольника, а A_2 — нет. Докажите, что $T(A_1) < T(A_2)$.

[1] Диаметр многоугольника — длина наибольшей диагонали или стороны

[2] то есть никакие три не лежат на одной прямой

7. Пусть в трёхмерном пространстве отмечено $2n$ точек в общем положении, то есть никакие четыре не лежат в одной плоскости. Эти точки покрашены в два цвета: одна половина в синий, а другая в красный. Докажите, что существует такая положительная константа c, что найдётся $cn^{5/2}$ тетраэдров с двумя красными и двумя синими вершинами таких, что в их внутренности не будет отмеченных точек.

8. На плоскости расположено n прямоугольников со сторонами параллельными осям координат такие, что стороны прямоугольников лежат на различных прямых. Границы прямоугольников разбивают плоскость на несколько областей. Область называется интересной, если на её границе есть хотя бы одна вершина одного из прямоугольников. Докажите, что сумма числа вершин всех интересных областей не больше чем $40n$. (Заметим, что среди областей могут быть невыпуклые области, а также области, ограниченные несколькими ломаными.)

9. Пусть на прямой выбрано нечетное число единичных отрезков $[a_1, b_1], \ldots, [a_{2n-1}, b_{2n-1}]$, то есть $b_i = a_i+1$ для $i = 1, \ldots, 2n-1$. Пусть $0 < t < 1/2$. Докажите, что одна из точек вида $a_i + t$ или $b_i - t$, где $i = 1, \ldots, 2n-1$, покрыта нечётное число раз отрезками.