Теория чисел.

1. Для каких $n \geqslant 2$ выполнено следующее: для любых целых $a_1, a_2, \dots a_n$, сумма которых не делится на n, найдётся такое i, что ни одно из чисел

$$a_i,\, a_i + a_{i+1}\,, \dots, a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$$

не делится на n. Нумерация циклическая.

2. Найдите все тройки целых чисел, сумма и сумма кубов которых равна 3.

3(N2). Найдите все натуральные a, b, c, для которых

$$a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2.$$

4. Докажите, что для любого натурального N существуют $a > b > N$, что у чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ наборы делителей совпадают.

5. У Кирилла есть необычный калькулятор с тремя кнопками: ϕ, τ, σ.
Нажатие на первую кнопку меняет число n на экране калькулятора на количество натуральных чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.
Нажатие на вторую кнопку меняет число n на экране на количество натуральных делителей числа n.
Нажате на третью кнопку меняет число n на сумму его делителей.
Докажите, что для любых целых $a, b > 1$ из числа a на экране получить b за несколько нажатий кнопки.

6. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представимо в виде суммы двух квадратов. Существуют ли два хороших числа, разница между которыми равна 2019, между которым нет хороших чисел?

7. а) Число 3^{2019} начинается с двойки и содержит ещё 963 цифры. А сколько единиц подряд можно найти в десятичной записи числа $\frac{1}{3^{2019}}$?
б) Рассмотрим последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, заданную рекуррентно $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$.
Докажите, что в десятичной записи числа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_k}$ содержится любая конечная последовательность цифр.