Кружок в “Хамовниках”. 2020-2021 учебный год.

Набираем форму. Разнобой.

1. Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = \frac{2}{3}$. Prove that:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

2. Будем рассматривать строки из 100 чисел, каждое из которых от 1 до 2020. Будем говорить, что один строка $(x_1, x_2, \ldots x_{100})$ *превосходит* строку $(y_1, y_2, \ldots y_{100})$, если для всех i выполнено $x_i > y_1$, и *превосходит нестрого*, если для всех i выполнено $x_i \geqslant y_i$. Какое наибольшее количество различных строк можно выписать так, чтобы
а) среди них не было двух строк, одна из которых превосходит другую;
б) среди них не было двух строк, одна из которых нестрого превосходит другую?

3. Дан треугольник остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Рассматриваются всевозможные пары внешним образом касающихся окружностей β и γ со следующими свойствами:
⊛ окружность β имеет центр на прямой AB и проходит через точку B;
⊛ окружность γ имеет центр на прямой AC и проходит через точку C.

Окружность β вторично пересекают прямые BA, BC в точках X, P соответственно. Окружность γ вторично пересекают прямые CA, CB в точках Y, Q соответственно. Обозначим точку касания β и γ через T. Докажите, что каждая из четырёх прямых TX, TY, TP, TQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружностей β и γ.

4. Для данного простого числа p последовательность a_k определяется следующими условиями: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$. Найдите все p, при которых в этой последовательности встретится число -1.

5. Есть три класса по n школьников в каждом. Все $3n$ школьников разного роста. Рассматриваются все такие разбиения школьников на n тройки, что в каждой тройке по одному представителю каждого класса. В каждой троке выделим самого высокого. Оказалось, что при любом разбиении из каждого класса будет хотя бы по 10 учеников. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Обозначим k множество натуральных чисел, не содержащих семёрку в своей десятичной записи. Найдите все такие многочлены f с целыми неотрицательными коэффициентами, что для любого $n \in K$ число $f(n)$ тоже лежит в множестве K

7. Многочлен P с целыми коэффициентами таков, что для любого натурального n сумма цифр числа $|P(n)|$ не является числом Фибоначчи. Обязательно ли P — константа?

8. В чемпионате страны Лилипутов по баскетболу участвовали 16 команд. Турнир прошёл за 15 тур, в каждом туре команды играли по одному матчу. В итоге каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. После того, как все туры прошли Центр Предвзятого Мнения за каждый тур назначил одну из команд, выигравшей свой матч в этот тур, лучшей командой тура. Назовём команду *неудачливой*, если она единственная из всех ни разу не стала лучшей командой тура. Назовём команду *потенциально неудачливой*, если Центр Предвзяатого Мнения может сделать её неудачливой. Каким может быть количество потенциально неудачливых команд?

9. Let ABC be an acute scalene triangle with circumcenter O and altitudes $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$. Let X, Y, Z be the midpoints of $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$. Lines AD and YZ intersect at P, lines BE and ZX intersect at Q, and lines CF and XY intersect at R.

Suppose that lines YZ and BC intersect at A', and lines QR and EF intersect at D'. Prove that the perpendiculars from A, B, C, O, to the lines QR, RP, PQ, $A'D'$, respectively, are concurrent.