Мера и фазовое пространство

1. (*Привет из 8 класса*) В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдётся кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

2. В пространстве нарисовано n прямых. Докажите, что можно выбрать из них не менее $\frac{7}{24}n$, попарно не перпендикулярных друг другу.

3. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть непересекающимися кругами радиуса 1.

4. *Отрезком* на сфере назовем любую дугу любой окружности, полученной как сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. На сфере радиуса 1 нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная длиной меньше 2π. Докажите, что существует полусфера, полностью содержащая ломаную.

5. В пространстве дан выпуклый многогранник, сумма телесных углов которого меньше чем 2π. Докажите, что в этом многограннике есть *гамильтонов цикл*: то есть что муравей может проползти по некоторым рёбрам многогранника так, чтобы побывать в каждой вершине ровно по разу и вернуться в исходную точку. *Мерой* телесного угла называется площадь куска, отъедаемого этим углом от единичной сферы с центром в вершине угла.

6. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не изменяет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз.

7. В пироге радиуса R запекли монетку радиуса $r < R$. За какое минимальное число прямолинейных разрезов можно гарантированно задеть ножом монетку? Если разрез касается монетки, то она считается задетой.

8. (**IMO-2002.6**) Let $n \geqslant 3$ be a positive integer. Let $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ be unit circles in the plane, with centres $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$ respectively. If no line meets more than two of the circles, prove that
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$