Хлебните геометрии

1. Suppose that I is the incenter of triangle ABC. The perpendicular to line AI from point I intersects sides AC and AB at points B' and C' respectively. Points B_1 and C_1 are placed on half lines BC and CB respectively, in such a way that $AB = BB_1$ and $AC = CC_1$. If T is the second intersection point of the circumcircles of triangles AB_1C' and AC_1B', prove that the circumcenter of triangle ATI lies on the line BC

2. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём AC — диаметр. Прямая, параллельная прямой AD и проходящая через точку B, пересекает диагональ AC в точке P. Прямая, параллельная прямой AB и проходящая через точку D, пересекает диагональ AC в точке Q. Перпендикуляры к диагонали AC, восстановленные в точках P и Q, пересекают стороны CB и CD в точках X и Y соответственно. Докажите, что периметр треугольника AXY равен удвоенной длине отрезка BD.

3. Точка K — середина отрезка AI, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые BI, CI второй раз пересекают окружность (ABC) в точках B_0, C_0 соответственно. На прямых AB_0, AC_0 отмечены точки P и Q соответственно так, что $\measuredangle ABK = \measuredangle PBC$, $\measuredangle ACK = \measuredangle QCB$. Докажите, что точки P, Q, I коллинеарны.

4. Let ABC be a scalene triangle with $\angle BCA = 90°$, and let D be the foot of the altitude from C. Let X be a point in the interior of the segment CD. Let K be the point on the segment AX such that $BK = BC$. Similarly, let L be the point on the segment BX such that $AL = AC$. The circumcircle of triangle DKL intersects segment AB at a second point T (other than D). Prove that $\angle ACT = \angle BCT$.

5. На описанной окружности остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечены середины B_0 и C_0 меньших дуг CA и AB соответственно, а также на меньшей дуге BC отмечена произвольная точка X. Отрезки B_0X и C_0X пересекают прямые CC_0 и BB_0 в точках P и Q соответственно. Отрезок AX пересекает прямые BB_0 и CC_0 в точках E и F соответственно. Прямые CE и BF пересекаются в точке Y. Докажите, что точки P, Q, X, Y лежат на одной окружности.

6. In cyclic quadrilateral $ABCD$, $AB > BC$, $AD > DC$, I, J are the incenters of $\triangle ABC, \triangle ADC$ respectively. The circle with diameter AC meets segment IB at X, and the extension of JD at Y. Prove that if the four points B, I, J, D are concyclic, then X, Y are the reflections of each other across AC.

7. Биссектрисы углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно и пересекают окружность (ABC) в точках B_0 и C_0 соответственно. На прямой BC отмечены такие точки K и L (порядок точек на прямой BC таков: $K - B - C - L$), что $BA = BK$, $CA = CL$. Обозначим через P и Q центры окружностей (CLB_0) и (BKC_0) соответственно. Прямые BP и CQ пересекаются в точке Z. Докажите, что $AZ \perp EF$.