Порешать.

Геометрия скорее не для ценителей.

1. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, M — середина стороны BC. Прямая, проходящая через M, пересекат окружность с диаметром AH в точках P и Q. Докажите, что ортоцентр треугольника APQ лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. Дан четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$, не являющийся вписанным. Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус окружности, описанной около треугольника $A_2A_3A_4$. Определим точки O_2, O_3, O_4 и числа r_2, r_3, r_4 аналогичным образом. Докажите, что

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

3. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности. Пусть A' — отражение A относительно O. Пусть $A'I$ пересекает описанную окружность в точке T, а S — точка пересечения AT и BC. Докажите, что $IS \perp IA$.

4. Точка I — центр вписанной окружности равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Окружность ω проходит через точку C и касается прямой AI в точке I. Точки повторного пересечения окружности ω с прямой AC и с описанной окружностью треугольника ABC обозначены через Q и D соответственно. Точки M и N — середины отрезков AB и CQ соответственно. Докажите, что прямые AD, MN, BC пересекаются в одной точке.

5. Triangle ABC circumscribed (O) has A-excircle (J) that touches $AB,\ BC,\ AC$ at $F,\ D,\ E$, resp.

a. L is the midpoint of BC. Circle with diameter LJ cuts $DE,\ DF$ at $K,\ H$. Prove that (BDK), (CDH) has an intersecting point on (J). b. Let $EF \cap BC = \{G\}$ and GJ cuts $AB,\ AC$ at $M,\ N$, resp. $P \in JB$ and $Q \in JC$ such that

$$\angle PAB = \angle QAC = 90^\circ.$$

$PM \cap QN = \{T\}$ and S is the midpoint of the larger BC-arc of (O). (I) is the incircle of ABC. Prove that $SI \cap AT \in (O)$.

Задачи для ценителей.

6. В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016

7. В левом столбце и нижней строке таблицы 11×11 лежат фишки — всего 2^{15} фишек. За один ход разрешается выбрать две граничащие по углу клетки, снять с них по фишке и добавить фишку в клетку, имеющую общую сторону с выбранными. Можно ли добиться того, чтобы хотя бы одна фишка попала в правый верхний угол?

8. У Кирилла есть необычный калькулятор с тремя кнопками: ϕ, τ, σ.
Нажатие на первую кнопку меняет число n на экране калькулятора на количество натуральных чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.
Нажатие на вторую кнопку меняет число n на экране на количество натуральных делителей числа n.
Нажате на третью кнопку меняет число n на сумму его делителей.
Докажите, что для любых целых $a, b > 1$ из числа a на экране получить b за несколько нажатий кнопки.

9. Докажите, что функция $f(n) = n^{2020} - n!$ в разных натуральных точках принимает различные значения.

10. Назовём *ценой* последовательности действительных чисел $a1, \ldots, a_n$ наибольший модуль суммы нескольких её первых членов. Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ с нулевой суммой такова, что любая перестановка её членов не уменьшает её цены. У некоторых членов этой последовательности сменили знак. Докажите, что её цена не уменьшилась.

11. Существуют ли на плоскости 4 точки, попарные расстояния между которыми — целые нечётные числа?