Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Определение. *Основные симметрические многочлены.*

$$\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

Основная теорема о симметрических многочленах. Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

1. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен $q = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
(a) Для любого одночлена $q = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, что старший член многочлена
$\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2}\cdots\sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q. Причем числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ определены этим условием однозначно.
(b) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

2. Выразите через основные симметрические многочлены
(a) $x^2 + y^2 + z^2$; **(b)** $x^3 + y^3 + z^3$; **(c)** $x^4 + y^4 + z^4$.

3. Есть многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен от его (комплексных) корней есть рациональное число.

4. Многочлен $x^{2021} + y^{2021}$ выразили через основные симметрические,
как $P(xy, x + y)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

5. Пусть α — корень многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами, β — корень многочлена $g(x)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что найдется многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является
(a) $\alpha + \beta$; **(b)** $\alpha\beta$.

6. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1} \pm\sqrt{2} \pm\sqrt{3} \pm \cdots \pm\sqrt{2020}$ является целым числом.

7. **Формула Ньютона.** Пусть $S_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.
$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^{k-1}k\sigma_k.$$
При этом мы считаем, что при $i > n$, $\sigma_i = 0$.
(a) Докажите эту формулу при $n = k$.
(b) Докажите эту формулу при произвольных n и k.