

Про цешки

1. Докажете комбинаторно следуюшие тождества:

(a) $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$,

(b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

(c) $C_m^k \cdot C_n^m = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

2. Чему равно $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k$?

3. **Свёртка Вандермонда.** Докажете тождество:

$$C_{r+s}^n = C_r^0 \cdot C_s^n + C_r^1 \cdot C_s^{n-1} + \dots + C_r^r \cdot C_s^{n-r}.$$

4. Чему равно $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$?

5. Вычислите суммы:

(a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots$

(b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots$

(c) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

(d) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$

(e) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots$

(f) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + 4^2C_n^4 + \dots$

(g) $C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \dots$

(h) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots$