Лемма об изогоналях

1. **Лемма.** Внутри угла AOB проведены лучи OD и OC, симметричные относительно биссектрисы этого угла. Если P — точка пересечения AD и BC, а Q — точка пересечения BD и AC, то лучи OP и OQ также симметричны относительно биссектрисы угла AOB.

2. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1C_1 пересекает биссектрису угла B в точке P, а отрезок A_1B_1 биссектрису угла C в точке Q. Докажите, что $\angle PAB = \angle QAC$.

4. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGH$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте треугольника ABC, проведённой из вершины A.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Диагонали AC и DB пересекаются в точке E, а прямые AB и CD пересекаются в точке F. На прямой EF взяли такую точку P, что $\angle BPE = \angle EPC$. Докажите, что $\angle APE = \angle DPE$.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки I и K — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ACD соответственно, а J и L — центры их вневписанных окружностей, со сторон BC и CD соответственно. Докажите, что прямые IL и JK пересекаются на биссектрисе угла BCD.

Вырожденные случаи

7. Пусть OC и OD — изогонали угла AOB. Прямые AD и BC пересекаются в точке P. Если $AB \parallel CD$, рассмотрим луч OQ, параллельный AB. Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOB. (Точка Q бесконечно удалена.)

8. Пусть OC и OD — изогонали угла AOB. Прямая, проходящая через B параллельно OC пересекает AD в точке P. Прямая, проходящая через A параллельно OC пересекает BD в точке Q. Тогда OP и OQ изогонали. (Точка C бесконечно удалена.)

9. Пусть OC и OD — изогонали угла AOB. Прямая, проходящая через C параллельно OB, пересекает прямую, проходящую через D параллельно OA, в точке P. Прямая, проходящая через C параллельно OA, пересекает прямую, проходящую через D параллельно OB, в точке Q. Тогда OP и OQ изогонали относительно угла AOB. (Точки A и B бесконечно удалены.)

Лемма об изогоналях. Ещё задачи.

1. В остроугольном треугольнике ABC выполнено соотношение $AB < AC$. На стороне BC выбраны такие точки D и E, что $BD = CE < BC/2$. Точка P внутри треугольника такова, что $PD \parallel AE$ и $\angle PAB = \angle EAC$. Докажите, что $\angle PBA = \angle PCA$.

2. Вершины B и C треугольника ABC спроецировали на биссектрису внешнего угла A, получили точки B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямые A_1C и C_1A пересекаются на внутренней биссектрисе угла A.

3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ и прямая CD разделяет точки P и Q. Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

5. На прямой, содержащей высоту треугольника ABC, проведённую к стороне BC, выбрали точку X. Точка D — середина дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC, не содержащая точку A. Прямая, проходящая через центр окружности, параллельно AD пересекает прямую XD в точке N. Точка M — середина отрезка XD. Докажите, что $\angle XAM = \angle NAO$.

6. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точки E и F — проекции точки P на стороны AB и CD соответственно. Отрезки CE и BF пересекаются в точке Q. Докажите, что PQ и EF перпендикулярны.

7. К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1 и BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

8. Точка H' симметрична основанию высоты AH треугольника ABC относительно середины стороны BC. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке X. Прямая, проходящая через H' и перпендикулярная XH' пересекает прямые AB и AC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что $\angle YXB = \angle ZXC$.