

Повторяем композицию гомотетий

- (a) Даны две неравные окружности ω_1 и ω_2 . Окружность γ касается их внешним образом в точках A и B . Докажите, что прямая AB проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора γ .

(b) Даны две неравные окружности ω_1 и ω_2 . Окружность γ касается их внутренним образом в точках A и B . Докажите, что прямая AB проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора γ .
- Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD . Докажите, что точки пересечения прямых AB и CD , AP и DQ , CQ и PB лежат на одной прямой.
- Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q . На сторонах четырёхугольника выбрали по точке так, что получился параллелограмм, причем одна пара его сторон параллельна PQ . Докажите, что центр параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.
- В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D . Пусть ω_1 и Ω_1 , ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и невписанные (касающиеся AB) окружности треугольников ACD и BCD . Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2 , Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB .
- Дан треугольник ABC . Рассмотрим окружность, касающуюся внутренним образом описанной окружности треугольника ABC в точке P_A , а также сторон AB и AC . Аналогично определим точки P_B и P_C . Докажите, что прямые AP_A , BP_B и CP_C пересекаются в одной точке.
- Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB , DC пересекаются в точке P , а лучи AD , BC — в точке Q . Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B , C , D , можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A , также можно вписать окружность.
- Окружности ω_1 , ω_2 и ω_3 вписаны в углы треугольника ABC . Окружность Ω касается их внешним образом в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно.

(a) Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

(b) Пусть радиусы ω_1 , ω_2 и ω_3 равны. Докажите, что центр Ω лежит на прямой, соединяющей центр вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .
- Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр невписанной окружности треугольника CDA , касающейся стороны AC , лежат на одной прямой.