

Лягушка Фибоначчи

- (а) Лягушка Фибоначчи стоит на первой клетке доски и умеет прыгать на одну или на две клетки вперёд. Доска содержит $n + 2$ клетки. На k -й клетке сидит огромный кузнечик. На клетке перед кузнечиком останавливаться нельзя, иначе лягушка спугнёт кузнечика и не сможет его съесть. Съев кузнечика, лягушка становится тяжёлой и может прыгать только на соседнюю клетку. Сколькими способами лягушка сможет допрыгать до последней клетки, съев по пути кузнечика?

(б) Лягушка Фибоначчи стоит на первой клетке доски, содержащей $n + m$ клеток. На $(n - 1)$ -й клетке находится вкусная не пугливая муха, на n -й — не пугливый комар. Сколькими способами лягушка сможет добраться до последней клетки доски, сожрав по пути только муху, но не комара? Съев комара (муху при этом можно есть или не есть)?

(с) Дана доска длиной в 2021 клетку. Две лягушки Фибоначчи должны проскакать от первой до последней клетки, причём первая обязательно должна побывать в 1010-й клетке, а вторая — в 1011-й клетке. У какой из лягушек больше способов выполнить свою задачу и на сколько?
- Докажите комбинаторными рассуждениями тождества
 - $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$;
 - $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
- Найдите значение выражения $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}$.

Формулы. Евклид.

- Докажите, что F_{2n} делится на F_n .
- Докажите, что F_{kn} делится на F_n .
- Докажите, что $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$.
- Докажите, что F_n делится на F_m тогда и только тогда, когда n делится на m (или когда $m = 2$).
- Вычислите $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_N}{F_{N-1} \cdot F_{N+1}}$.
- Можно ли натуральный ряд разбить на последовательности, каждая из которых удовлетворяет рекуррентному соотношению чисел Фибоначчи?