

## Связность графов

**Определение.** Вершина  $v$  связного графа  $G$  называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины  $v$  граф  $G$  теряет связность. Граф  $G$  называется *двусвязным*, если он связан и сохраняет связность при удалении любой вершины.

**Определение.** *Блоком* связного графа  $G$  называется максимальный по включению двусвязный подграф графа  $G$ .

1. В графе  $G$  хотя бы три вершины. Докажите, что вершина  $v$  — точка сочленения тогда и только тогда, когда существует пара вершин  $u$  и  $w$ , для которых любой путь из  $u$  в  $w$  проходит через  $v$ .
2. Пусть  $G$  — связный граф, а  $B_1$  и  $B_2$  — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков  $B_1$  и  $B_2$  либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

**Определение.** Пусть  $B_1, \dots, B_n$  — все блоки связного графа  $G$ , а  $a_1, \dots, a_m$  — все точки сочленения графа  $G$ . Построим *дерево блоков и точек сочленения*  $B(G)$  с вершинами  $B_1, \dots, B_n, a_1, \dots, a_m$ , в котором вершины  $a_i$  и  $B_j$  соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения  $a_i$  является одной из вершин блока  $B_j$ .

3. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

**Определение.** граф называется *кактусом*, если любое его ребро лежит ровно в одном простом цикле.

4. (а) Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы.  
(б) Докажите, что если в связном графе без мостов все простые циклы нечётные — это кактус.

**Теорема Менгера.** Граф двусвязен тогда и только тогда, когда любые две вершины лежат на простом цикле. *Мы, как обычно, докажем нечто большее.*

5. Докажите равносильность следующих условий:
  - граф двусвязен;
  - любые две вершины принадлежат простому циклу;
  - любая вершина и ребро принадлежат простому циклу.

6. Докажите равносильность следующих условий:

- граф двусвязен;
- любые два ребра принадлежат простому циклу;
- для любых двух вершин и ребра существует простая цепь с концами в этих вершинах, проходящая через это ребро.

7. Докажите равносильность следующих условий:

- граф двусвязен;
- для любых трех вершин существует цепь, соединяющая первые две из них и проходящая через третью;
- для любых трех вершин существует цепь, соединяющая первые две из них и не проходящая через третью.

8. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город  $A$  закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города  $A$ ). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.