

Связность графов

Определение. Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины v граф G теряет связность. Граф G называется *двусвязным*, если он связан и сохраняет связность при удалении любой вершины.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G .

1. В графе G хотя бы три вершины. Докажите, что вершина v — точка сочленения тогда и только тогда, когда существует пара вершин u и w , для которых любой путь из u в w проходит через v .
2. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение. Пусть B_1, \dots, B_n — все блоки связного графа G , а a_1, \dots, a_m — все точки сочленения графа G . Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \dots, B_n, a_1, \dots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j .

3. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

Определение. граф называется *кактусом*, если любое его ребро лежит ровно в одном простом цикле.

4. (а) Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы.
(б) Докажите, что если в связном графе без мостов все простые циклы нечётные — это кактус.

Теорема Менгера. Граф двусвязен тогда и только тогда, когда любые две вершины лежат на простом цикле. *Мы, как обычно, докажем нечто большее.*

5. Докажите равносильность следующих условий:
 - граф двусвязен;
 - любые две вершины принадлежат простому циклу;
 - любая вершина и ребро принадлежат простому циклу.

6. Докажите равносильность следующих условий:

- граф двусвязен;
- любые два ребра принадлежат простому циклу;
- для любых двух вершин и ребра существует простая цепь с концами в этих вершинах, проходящая через это ребро.

7. Докажите равносильность следующих условий:

- граф двусвязен;
- для любых трех вершин существует цепь, соединяющая первые две из них и проходящая через третью;
- для любых трех вершин существует цепь, соединяющая первые две из них и не проходящая через третью.

8. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.