

Разнобой

1. Рассматривается последовательность натуральных чисел $2, 6, 30, \dots$, в которой k -й член есть произведение первых k простых чисел, $k = 1, 2, \dots$. Известно, что разность некоторых двух чисел этой последовательности равна 30000. Найдите эти числа.
2. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8×8 . Одним ходом разрешается закрасить одну или несколько клеток, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце таблицы. Клетки, закрашенные ранее, закрашивать вторично запрещается. Проигравшим считается тот из игроков, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?
3. Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Точка M — середина боковой стороны AB , точка N симметрична центру описанной окружности треугольника ABD относительно прямой AD . Докажите, что $\angle CMN = 90^\circ$.
4. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от общего числа женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.
5. Девять гирек расположены по кругу. Известно, что одна из них имеет массу 1 г, а за ней последовательно по ходу часовой стрелки расположены гириками массами 2 г, 3 г, ..., 9 г. Размеры гирек одинаковы, и других гирек нет. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах определить гирику массой 1 г?
6. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

7. Пусть S — непустое подмножество натуральных чисел такое, что если $a, b \in S$, то $ab + 1 \in S$. Докажите, что множество простых чисел, взаимно простых со всеми элементами S , конечно.