Изогональное сопряжение

Определение. Дан треугольник ABC. Точки P и Q называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC, если прямые PA и QA симметричны относительно биссектрисы угла A, прямые PB и QB симметричны относительно биссектрисы угла B, прямые PC и QC симметричны относительно биссектрисы угла C.

1. Какие точки изогонально сопряжены сами себе? Во что переходят точки описанной окружности при изогональном сопряжении?

2. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.
   (a) Пусть x, y, z — расстояния от точки P до прямых AB, AC, BC соответственно, x', y', z' — расстояния от точки Q до этих прямых. Докажите, что $xx' = yy' = zz'$.
   (b) Опустим из точек P и Q перпендикуляры на прямые AB, AC, BC. Докажите, что 6 полученных точек лежат на одной окружности.
   (c) Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C \neq 90^\circ$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB, BC, AC, и середина отрезка AC лежат на одной окружности.

3. В треугольнике ABC провели высоты AA_0, BB_0, CC_0. M — произвольная точка, A_1 — точка, симметричная M относительно BC, аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

4. Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90^\circ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из A на DC, P — такая точка на прямой AC, что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD. Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

5. На окружности расположены точки A, C, E, B, F, D в указанном порядке. Отрезки AB и DE пересекаются в точке X, отрезки AF и CD — в точке Y, отрезки BC и EF — в точке Z. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

6. Внутри треугольника ABC выбрана точка P такая, что $PB = PC$. Точка Q такова, что она лежит в разных с A полуплоскостях относительно прямой BC и $\angle ABP = \angle BCQ$, $\angle ACP = \angle CBQ$. Докажите, что точки A, P, Q лежат на одной прямой.

7. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1, точка I — центр этой окружности. Прямая, проходящая через точку A_1 перпендикулярно AA_1, пересекает прямые B_I и C_I в точках X и Y соответственно. Докажите, что $AX = AY$.

8. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC остроугольного треугольника ABC пересекают медиану, проведенную из вершины A, в точках D и E соответственно. Прямые CE и BD пересекаются в точке F. Докажите, что F лежит на окружности, построенной на AO как на диаметре, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.