

Многочлены 2й и 3й степени

1. Имеются две тройки действительных чисел, у которых совпадают суммы и суммы попарных произведений. Известно, что минимальное число первой тройки не превосходит минимального числа второй тройки. Докажите, что и максимальное число первой тройки не превосходит максимального числа второй тройки.
2. Даны четыре приведённых квадратных трёхчлена. Сумма любых двух из них имеет ровно один корень. Докажите, что среди этих трёхчленов не более двух различных.
3. Сколькими способами можно разбить множество $C = \{1, 2, 4, \dots, 2^{2021}\}$ на два непустых подмножества A, B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$ имело целый корень (коэффициенты — суммы чисел соответствующего подмножества)?
4. На доске написано несколько приведённых кубических многочленов с неотрицательными коэффициентами. Разрешается выбрать любые два из имеющихся многочленов и заменить их на два других приведённых многочлена либо с той же суммой, либо с тем же произведением. Можно ли, действуя таким образом, получить набор многочленов, каждый из которых имеет три различных положительных корня?
5. На доске написано 100 чисел из интервала $(0; 1)$. Разрешается выбрать любые два числа a, b и заменить их на два корня квадратного трёхчлена $x^2 - ax + b$ (если этот трёхчлен имеет два различных корня). Может ли этот процесс продолжаться бесконечно долго?
6. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех рёбер иррациональны, объём и полная поверхность целые, а сумму квадратов длин трёх различных рёбер — квадрат целого?
7. Дан приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных корня, причём сумма двух из них равна -1 . Докажите, что свободный член трёхчлена не превосходит $-1/4$.