

Милая вторая задача

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω , описанную около треугольника ABC , в точках B и E . Окружность ω , построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F . Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD , содержит медиану треугольника ABC .
2. Семь лыжников с номерами 1, 2, ..., 7 ушли со старта по очереди и прошли дистанцию – каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника – тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.
3. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B . Из точки P , лежащей на прямой b , опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.
4. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC .
5. У Пети и Коли в тетрадах записаны по два числа; изначально – это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 – у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трёхчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля – квадратный трёхчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни; иначе ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5?
6. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k -угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?