Делимость и остатки

1. Даны два натуральных числа $a < b$. Докажите, что из любых b последовательных натуральных чисел можно выбрать два числа, произведение которых делится на ab.

2. Докажите, что для любого простого нечётного числа p существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что $2^n n + 1$ делится на p без остатка.

3. При каком наименьшем n существует набор целых чисел $a_1, \dots, a_n$, при котором квадратный трёхчлен $x^2 - 2(a_1 + \dots + a_n)^2 x + (a_1^4 + \dots + a_n^4 + 1)$ имеет целый корень?

4. Для некоторого натурального числа n и простого числа p произведение $(1^3+1)\dots(n^3+1)$ делится на p^3. Докажите, что $p \leqslant n + 1$.

5. Может ли произведение нескольких первых простых чисел быть на 1 меньше точной степени натурального числа, отличной от первой?

6. Дано натуральное число n. Известно, что найдутся пять последовательных натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на n, а их произведение делится на n. Докажите, что найдутся четыре последовательных натуральных числа такие, что ни одно из них не делится на n, а их произведение делится на n.

7. На доске написано натуральное число N. Новые числа выписываются на доску по следующему правилу. Разрешается стереть любое из имеющихся чисел и вместо него записать все его натуральные делители кроме него самого. Через некоторое время на доске оказалось N^2 чисел. Докажите, что $N = 1$.